गणितम्

अष्टमकक्ष्यायै पाठ्यपुस्तकम्

गणितम्

अष्टमकक्षायै पाठ्यपुस्तकम्

गणितम्

अष्टमकक्षायै पाठ्यपुस्तकम्

राष्ट्रियशैक्षिक-अनुसंधान-प्रशिक्षणपरिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

नवम्बरमासः 2013 इत्यस्मात् संस्करणात्
अस्माभिः संस्कृतानुवादः कृतः ।

आमुखम्

राष्ट्रिय-पाठ्यचर्यायाः रूपरेखा (2005) बोधयति यत् छात्राणां विद्यालयीय-जीवनस्य बाह्यजीवनेन सह योजनं करणीयम् इति। यः सिद्धान्तः पुस्तकीय- ज्ञानस्य तस्य न्यासस्य विपरीतम् अस्ति यस्य प्रभावद्वारा अस्माकं व्यवस्था एतावत्पर्यन्तं विद्यालय-गृहयोः मध्ये बहु-अन्तरं रक्षिता अस्ति। नूतन पाठ्यचर्या- आधारित पाठ्यक्रमः पाठ्यपुस्तकं च अस्य पारम्परिक-विचारस्य उपरि ध्यानं ददाति। एषः तु पारम्परिक-रटनशैलीं परित्यज्य प्रत्येकम् अपि विषयस्य दृढ-भित्ति-निर्माणस्य प्रयत्नः अस्ति। आशा अस्ति यत् अयं प्रयत्नः बालकेन्द्रित शिक्षणं प्रति अस्मान् नयति इति।

अस्य प्रयत्नस्य सफलता तु प्राचार्यैः शिक्षकैः च छात्राणाम् उत्साहवर्धनार्थं स्व-अनुभव-स्वाध्यायद्वारा अपि च स्व-कल्पनाद्वारा स्वीकरिष्यमाण-क्रमाणाम् उपरि एव वर्तते। अस्माभिः अङ्गीकर्तव्यं यत् यदि छात्राणां कृते स्थानं,समयः स्वतन्त्रता च दीयते तर्हि ते ज्येष्ठानां साहाय्येन नूतनं ज्ञानम् आत्मसात् कुर्वन्ति। शिक्षणस्य आधारभूततत्वानां विविध-सामग्रीणां विचारान् परित्यज्य यत् पुस्तकनिर्माणं भवति तत्तु परीक्षानिमित्तमात्रम् अस्ति। सर्जनात्मकतायाः उपक्रमस्य विकासः तदा एव सफलो भवति यदा शिक्षकाः छात्राणां कृते ग्रहणस्य अर्जनस्य च अवसरं प्रदीयेरन्।

एतानि उद्देश्यानि विद्यालयस्य दैनिकजीवनस्य कार्यशैल्याः च विपुल-परिवर्तनम् अपेक्षन्ते। दैनिकसमयसारिण्याः नमनीयता तथा स्यात् यथा शिक्षणस्य कृते यावन्ति दिनानि अपेक्षितानि इति मनसि निधाय वार्षिकसमयसारिणी निर्मिता भवेत्। शिक्षण-मूल्याङ्कन-विधयः एनम् एव अंशं निर्धारयन्ति येन पाठ्यपुस्तकेन छात्राः मानसिक-खिन्नतां पठने च आलस्यं परित्यज्य सन्तोषकरम् अनुभवं प्राप्नुयुः। बालमनोविज्ञानं मनसि निधाय छात्राणां भारानुभवस्य परिमार्जनार्थम् उपलब्ध-समयस्य-उपरि अवधानं दत्वा पुस्तकमिदं निर्मितमस्ति। पाठ्यपुस्तकमिदं प्रयत्नमेनम् इतोऽपि अग्रे नेतुं छात्राणां चिन्तन-विचाराणां, विस्मयानां, लघुसमूहे वार्तालापानां, अथ हस्तेन क्रियमाण-गतिविधीनां च प्राधान्यं प्रयच्छति।

एन्.सी.ई.आर्.टी. अस्य पुस्तकस्य निर्माणार्थं निर्मित-समितेः परिश्रमस्य कृते कृतज्ञताम् आविष्करोति। पाठ्य-पुस्तक-परामर्श-समितेः अध्यक्षस्य प्रो.जयन्त विष्णु नारलीकर महोदयस्य कृते एवं च अस्य पुस्तकस्य मार्गदर्शकस्य डा.हृदयकान्त दीवान महोदयस्य कृते विशेषतः वयं कृतज्ञताम् अर्पयामः। अस्य पाठ्य-पुस्तकस्य विकासे नैकानां शिक्षकाणां योगदानं वर्तते अपि च तस्य उद्देश्यस्य परिपूर्तये तेषां प्राचार्याणाम् अपि योगदानम् अस्ति। अतः तेभ्यः सर्वेभ्यः कृतज्ञता अत्र व्याह्रियते। ये सङ्घाः संस्थाः च स्व-संसाधनद्वारा सामग्रीद्वारा सहयोगिनां द्वारा च औदार्येण साहाय्यं कृतवन्तः तेभ्यः सर्वेभ्यः कृतज्ञतां व्याहरामः। वयं विशेषतः माध्यमिक-उच्चतर-शिक्षाविभागः, मानव-संसाधन-विकास-मन्त्रालयद्वारा प्रो.मृणाल मिरी अपि च प्रो. जी.पी.देशपाण्डे महोदययोः आध्यक्षे नियुक्तायाः राष्ट्रिय मानीटरिङ्ग समितेः द्वारा प्रदत्त समयस्य योगदानस्य च कृते अधमर्णतां प्रदर्शयामः। व्यवस्थायाम् अपि च स्व-प्रकाशने निरन्तर-गुणात्मकतामानेतुं एन्.सी.ई.आर्.टी. सर्वदा भवतां मार्गदर्शनं टिप्पणीः च स्वागतीकरोति येन अग्रिम-संशोधने पुस्तक-निर्माणे च साहाय्यं भवेत्।

नवदेहली
30 नवम्बर 2007

निदेशकः
राष्ट्रिय-शैक्षिक-अनुसन्धान-
प्रशिक्षण-परिषद्

भारतीय-संविधानम्

उद्देशिका

वयं भारतीयाः, भारतदेशम् एकं [1]**[सम्पूर्ण-प्रभुत्व-सम्पन्नम्, समाजवादि, पंथ-निरपेक्षम्, लोकतन्त्रात्मक-गणराज्यं]** निर्मातुं तथा च तस्य समस्तनागरिकाणां कृते;

सामाजिकम् आर्थिकं तथा च राजनैतिकं न्यायम्, विचारस्य, अभिव्यक्तेः, विश्वासस्य, धर्मस्य,

उपासनायाः च **स्वतन्त्रताम्,**

प्रतिष्ठायायाः अवसरस्य च **समतां**

प्रापयितुं

तथा च तेषु **सर्वेषु** मानवीयगौरवस्य तथा च [2]**[राष्ट्रियैकतायाः अखण्डतायाश्च] सुनिश्चयकर्त्रीं बन्धुतां संवर्धयितुं**.....

दृढसंकल्पाः भूत्वा **अस्यां स्वसंविधानसभायाम्** अद्य नवम्बरमासस्य 26 तमे दिनाङ्के 1949 तमे ख्रीस्ताब्दे (मार्गशीर्षे शुक्लसप्तम्यां 2006 तमे विक्रमसंवत्सरे) **एतत् संविधानम् अङ्गीकुर्मः अधिनियमितं तथा च आत्मार्पितं कुर्मः ।**

---

1. संविधानाधिनियमः (द्वाचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "प्रभुत्व-सम्पन्नलोकतन्त्रात्मक-गणराज्यम्" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम्।
2. संविधानाधिनियमः (द्वाचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "राष्ट्रस्य एकताः" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम्।

प्रस्तावना

प्रस्तुत-पुस्तकमिदम् उच्चतर-प्राथमिक-शृङ्खलायाः अन्तिमं पुस्तकं वर्तते । गणिताधिगमनं भिन्नप्रकारेण परिभाषितुम् एका रोचका यात्रा अस्ति। ईदृक्सामग्रीणां निर्माणकाले यः स्तरः शिक्षार्थिनां रुचिं सम्बोधयेत्, तेषां कृते एकं पर्याप्तं सुगम्यम् आवाहनञ्च भवेत् एतदर्थम् अथ च गणितस्य प्रकृतिं संरक्षणार्थं, गणितं कथं पठनीयम् इति प्रश्नसम्मेलनार्थम् एषः प्रयासः कृतः वर्तते। गणितस्य उद्देश्योपरि अनेके दृष्टिकोणाः सन्ति। एते दृष्टिकोणाः पूर्णतया उपयोगिनः, सम्पूर्णतया सौन्दर्यपूर्णाः, सुरुचिदायकाः अवबोधनपरकाश्च सन्ति । अन्ततः सारः अयमेव यत् अवधारणासु न पतामः अथ जीवने सम्यक् भागं ग्रहीतुं शिक्षार्थिनां कृते उपलब्ध-उपकरणं संवर्धयेम। राष्ट्रिय-पाठ्यचर्या-रूपरेखायां विचाराणां पुनः अनुभवानाम् अपि गणितीयकरणक्षमतायाः विकासार्थं बलं दीयते क्षमता सा एव यया समृद्धजीवनात्, तस्य परिवेशाच्च अर्थपूर्णं सम्बन्धं ज्ञातुं सारल्यं स्यात् अथ च गणितेन प्रदत्तान् विचारान् रूपरेखाश्च बोधितुं सा साहाय्यं कुर्यात्।

एतस्य बोधनं तावत् न सरलं, क्रियान्वयनं तु इतोऽपि कठिनं परन्तु राष्ट्रिय-पाठ्यचर्या-रूपरेखया अस्मिन् एकं कठिनं लक्ष्यं संयोजितम्। तत् लक्ष्यम् एतदेव यत् कक्ष्यायाम् उत बहिः गणितं साधयितुं तस्य वयसः प्रत्येकं जनः तेन सम्बद्धः भवेत् ।एतत् एव तत् लक्ष्यम् अस्ति यत् वयम् अस्यां श्रृंखलायां प्रेरयितुं प्रयतामहे। अत एव वयं बालान् चिंतने व्यस्तं कर्तुं, समाधितानां समस्यानां कार्याणाम् अथ तेषां विचाराणां तर्कसंगतरीत्या स्वयमेव स्वनियमेन परिभाषितुं स्थानं प्रदत्तवन्तः। बलम् अस्मिन् बिन्दौ नास्ति यत् बालाः कलनविधिं स्मरेयुः, जटिलानाम् अंकगणितीयानां समस्यानां समाधानं कुर्युः, उपपत्तीन् स्मरेयुः अपितु बलं तु अस्मिन् अस्ति यत् गणितं कथं कार्यं करोति तथा तं विधिं जानीयुः येन समस्यां समाधातुं सहायता भवेत्।

सर्वमहत्त्वपूर्णचिंता अस्माकं समक्षं सा एव आसीत्, वयं कथं निश्चयेम यत् अस्मिन् स्तरे विद्यार्थिनः गणितं जानीयुः तथा गणितं दैनन्दिन्यां प्रयोगं कुर्युः । वयं पुस्तकपठने बालानां सहयोगाय प्रत्येकं चरणे यत्र नवीना धारणा प्रस्तुता अस्ति तत्र तेषाम् अवधानार्थं प्रयत्नं कृतवन्तः। एतस्य पुस्तकस्य भयावहतां दूरीकरणार्थं वयम् आकृतीनाम् आरेखानाञ्च प्रयोगं कृतवन्तः। एताः आकृतयः आरेखाश्च पाठ्यसामग्र्या सह मिलित्वा बालान् अवधारणां बोद्धुं साहाय्यं कुर्वन्ति। सम्पूर्णशृङ्खलायां तथा अस्मिन् पुस्तकेऽपि, वयं यान्त्रिकशब्दप्रयोगात् अथ जटिलसूत्रात् रक्षणप्रयासं कृतवन्तः। वयं बहव्यः वार्ताः एतदर्थं त्यक्तवन्तः यतो हि विद्यार्थिनः स्वयमेव व्याख्यां कुर्वन्तु अथ स्वशब्दे लिखन्तु।

वयम् ईदृशीं भाषां प्रयुक्तवन्तः यां बालकाः सरलरीत्या अवगच्छेयुः। केषांचित् बिन्दूनां ध्यानम् आक्रष्टुं वयं विज्ञापन-संकेतानां प्रयोगं कृत्वा दीर्घस्पष्टीकरणानां भारं न्यूनीकरणार्थं प्रयत्नं कृतवन्तः। एताः आकृतयः पूरकाश्च एकदृष्टिं त्रोटयन्ति पुनः सन्दर्भप्रदानस्य प्रयत्नं कुर्वन्ति।

8,9 कक्ष्यायाः कृते एकः सेतुः अस्ति, यत्र बालकाः अत्यधिक-औपचारिकरूपेण गणितं करिष्यन्ति। अत्र एवं प्रयत्नाः सन्ति येन केचन विचाराः औपचारिकत्वेन भवेयुः । उपरोक्तपुस्तके सम्मिलितकार्येषु एवम् आशा अस्ति यत् बालाः ईदृश्याः भाषायाः निरन्तरप्रयोगेन व्यापकीकरणं कुर्युः।

एतत् पाठ्यपुस्तकस्य विकासार्थं तादृशाः अनुभवशालिनः शिक्षकाः आसन् येन माध्यमेन बालाः गणितं जानीयुः इत्यस्मिन् विषये अधिकं ध्यानं दत्तवन्तः। अस्मिन् दले एतादृशाः अपि सदस्याः आसन् ये गणित-शिक्षणाधिगमे अनुसन्धानानुभवं तथा बालानां कृते सामग्रीनिर्माणानुभवम् अपि प्राप्तवन्तः। अस्य पाठ्यपुस्तकस्य विकसनकाले 6,7 कक्ष्यायाः पुस्तकोपरि यः विचारः आगतः तान् विचारान् अपि सम्यक् विचार्य विकसितवान्। पुस्तकविकसनप्रक्रियायां पाण्डुलिपिसम्बन्धित-कार्यशालायाम् अध्यापकैः सह कृताः चर्चाः अपि सम्मिलिताः सन्ति।

अहं प्रोफेसरकृष्णकुमारः निदेशकः एन.सी.ई.आर.टी, प्रोफेसरजी.रविन्द्रा संयुक्त निदेशकः एन.सी.ई.आर.टी, प्रोफेसरहुकुमसिंहः अध्यक्षःडी.ई.एस.एम एतान् सर्वान् प्रति स्वदलपक्षतः आभारं प्रकटयामि, येअस्मभ्यं पूर्णस्वतन्त्रतां सहायताञ्च प्रदाय एतत् कार्यं सम्पादयितुम् अवसरं प्रदत्तवन्तः। अहं विज्ञानगणितयोः परामर्शदातृ-समूहाध्यक्षः के सिंह गौतमः अथ डॉ.वी.पी.सिंहः किञ्च डॉ.आशुतोष वझलवारः एतेषां महोदयानाम् आभारं मन्ये, एते अस्मै कार्याय सम्यक्तया समन्वयनं यथा सम्भवं व्यवस्थाञ्च कृतवन्तः। अन्ते अहं एन.सी.ई.आर.टी प्रकाशनविभागस्य सहायतार्थं परामर्शार्थञ्च आभारं प्रकटयामि पुनः विद्याभवनस्थ तेषां

जनानां कृतेऽपि आभारं प्रकटीकरोमि ये पुस्तकनिर्माणे सहायतां कृतवन्तः । अस्य कथनस्य आवश्यकता नास्ति तथापि कथनं विना स्थातुं न शक्नोमि यत् सर्वे लेखकाः सम्भूय दलमिव परस्परं विचाराणां परामर्शानाञ्च आदान-प्रदानेन कार्यं पूरितवन्तः । वयं स्वसम्पूर्णक्षमतया सह कार्यं कृतवन्तः अथ आशा अस्ति यत् स्वसमक्षं प्रस्तुताह्वानेन सह कञ्चित् न्यायं कर्तुम् अपारयाम ।

सामग्री-विकसनप्रक्रिया एका सतत-प्रक्रिया अस्ति तथा वयं पुस्तकमिदम् इतोऽपि समीचीनतरं कर्तुम् इच्छामः । अस्य पुस्तकस्य कृते परामर्शानां टिप्पणीनाञ्च सहर्षं स्वागतं करिष्यामः ।

डॉ.एच.के.दीवानः
मुख्य-परामर्शदाता
पाठ्यपुस्तक-विकास-समितिः

शिक्षकाय-शब्दद्वयम्

इदम् अस्याः शृङ्खलायाः तृतीयम् अथ च अन्तिमं पुस्तकम् अस्ति । एषः गणितस्य गूढसिद्धान्तान् विचारानाञ्च अवगन्तुं विद्यार्थिनां सहायतायै प्रारभ्यमाणप्रक्रियायाः विस्तारः अस्ति । अस्माकं विद्यार्थिनः गणितीयविचारान् सम्यक्तया जानीयुः, तेषाम् उपयोगज्ञानार्थं तर्कसंगताधारस्य आवश्यकता अस्ति, येन ते गूढरहस्यम् अवगन्तुम् अभिगृहीतम् उपयोक्तुं किञ्च नवीनं सूत्रं रचयितुं योग्याः स्युः । राष्ट्रिय-पाठ्यचर्या-रूपरेखायां 2005 (NCF - 2005) उल्लेखितेषु मुख्यबिन्दुषु एतद् अस्ति यत् बालेषु गणितसहायता द्वारा व्यापकयोग्यतां विकसितुं, जटिलपरिकलनात् दूरे स्थातुं, कलनविधिना बोधनोत्पादितुं तथा बोधनस्य एकं स्वरूपं सज्जीकर्तुं विचारः अस्ति यथा जानन्त्येव भवन्तः गणितीयविचारः ज्ञापनमात्रेणैव विकसितः न भवति । केवलं व्याख्यया अपि एतान् विचारान् बालकाः अवगन्तुं न शक्नुवन्ति । बालानाम् अवधारणायाः स्वकीय-रूपरेखायाः आवश्यकता अस्ति, तेषां कृते एका ईदृशी कक्षा भवेत् यस्यां ते स्वविचारे चर्चां कर्तुं पारयेयुः, स्वसमस्यानां समाधानम् अन्वेषितुं शक्नुयुः, नवसमस्यां निर्मातुं समर्थाः स्युः, समस्यां समाधातुं स्वविध्यन्वेषितुं शक्याः भवेयुः तथा स्वयमेव परिभाषां निर्मातुं दक्षाः स्युः ।

यथा वयं पूर्वमेव कथितवन्तः यत् बालानां शिक्षणसहायतायै एतदावश्यकम् अस्ति यत् ते पाठ्यपुस्तकेन एवं गणितेन साकम् अन्यत् पुस्तकमपि बोधनपूर्वकं पठेयुः । स्पष्टतः सामग्रीणाम् अध्ययनावश्यकता गणिते विशिष्टतां प्राप्तुम् अस्ति । कृपया कक्षा 8 मध्ये एतत् ध्यातव्यं यत् विद्यार्थिनः किं शिक्षितवन्तः तथा ते एतादृशान् विषयान् स्वयमेव पठितुं शक्याः एतस्मै अवसराः प्रदातव्याः यस्मिन् संकेतेन सह भाषाप्रयोगोऽपि जातः स्यात् तथा कथञ्चित् आधिक्येन विना लघुता एवं संक्षिप्तता स्यात् । एतदर्थं यदि सम्भवः स्यात् तर्हि अन्यत् विषयवस्तु अपि पठनार्थं कथयेत् । भवन्तः तैः अधीतानां भौतिक-रसायन-विज्ञानस्य समीकरणानाम् अथ अधीत-गणितविचाराणां मध्ये सम्बन्धं स्थापयितुं शक्नुवन्ति । एते विभिन्नविषयसन्दर्भाः गणितोद्देश्यं रूपरेखाञ्च सज्जीकर्तुं तस्य सहायतां करिष्यन्ति । ते तर्कसंगततर्कानां रचनायां पटवः भवन्तु एतस्य आवश्यकता अस्ति तथा यदा एते अन्यक्षेत्रेण साकं सम्बन्धं स्थापयन्ति तदा केषाञ्चित् कारणानां बन्धनानाञ्च सञ्ज्ञानम् आवश्यकम् । 8 कक्ष्यायाः बालकेभ्यः एतेषां सर्वेषाम् अवसरप्रदानस्य आवश्यकता अस्ति ।

यथा वयं सबलं पूर्वमेव उक्तवन्तः यत् उच्चप्राथमिकस्तरे गणितं गूढं सहैव बालानाम् अनुभव-वातावरणानुरूपं भवेत् । विषयस्य सुलभता तथा तस्याः अनुभवप्रतिरूपद्वारा विचारे कार्यं कर्तुं वर्द्धनस्य आवश्यकता अस्ति । गूढतथ्यानां बोधनं तर्क-वितर्कान् बोधितुं अथ तान् सूत्ररूपे वर्णितुं साहाय्यं करोति । अवधारणा-मध्ये परस्पर-सम्बन्धं द्रष्टुं सामर्थ्यं अपरविषयेष्वपि प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं साहाय्यं करोति । एतत् सम्यक् प्रतिरूपं मानचित्रञ्च निर्मातुं, क्षेत्रफलं घनञ्च मापयितुं तथा आकारेषु मापेषु च समानतां द्रष्टुं बोधितुञ्च अस्माकं साहाय्यं करोति । यद्यपि एतत् अन्यक्षेत्रस्य ज्ञानस्य गणितेन सह सम्बन्धविषये अस्ति तथापि अस्माकं वातावरणे जीवने च अस्य अर्थे मुहुर्मुहुः अवधानस्य आवश्यकता अस्ति ।

बालकाः प्रासंगिक-उपस्थितौ उपयोगार्हान् सिद्धान्तान् परिचेतुं योग्याः भवितुं, समस्यां समाधेतुं, समस्यायाः सूक्ष्मपरीक्षणार्थम् अथ समस्यानुरूपं सूचनां चेतुं समर्थाः भवेयुः । एकबारं विद्यार्थिनः एनां योग्यतां प्राप्नुयुः तदनन्तरं ते स्वज्ञानोपयोगिविधिम् अन्वेषितुम् अथ समस्यावश्यकतानुसारं समाधानम् अन्वेषितुमपि समर्थाः भविष्यन्ति । तेषां समस्यां परिचेतुं, तां परिभाषितुं सम्भावित-समाधान-निर्माणार्थं तथा आवश्यकता चेत् तर्हि पुनः एतेषाम् आवृत्तेः आवश्यकता अस्ति । यथा-यथा ते अग्रे वर्धिष्यन्ते तदा तेषां कार्यम् इतोऽपि व्यापकं भविष्यति । 8 कक्ष्यायां तान् तद्द्वारा अनुसरणीयकार्यविषये सचेतान् कर्तुं भविष्यति ।बालेषु समस्यां विभिन्नभागेषु विभज्य समुचितप्रारूपं सज्जीकर्तुं, स्वयमेव व्यूहरचनां रचयितुम् अथ च समस्यायाः विश्लेषणं कर्तुं सहायतायाः आवश्यकता अस्ति । एतत् कार्यं कामपि समस्यां समाधातुं नियमानुसारकलनविधिं ज्ञापनस्थाने

भवति। गणितज्ञानं एतत् न बोधयति यत् केवलम् विधिम् अथवा समाधानं स्मरेत् तत्तु एवं बोधयति यत् समस्यायाः समाधानार्थं रुचिकरविधीनां निर्माणार्थं कथं भवेत् इति।

सहयोगात्मकः अधिगमः, वार्त्तालापमाध्यमेन अधिगमः, परस्परं शिक्षणस्य इच्छा, क्षमता तथा एतत् स्वीकरणं यत् वार्त्तालापः कोलाहलः नास्ति, परामर्शकरणं छलं नास्ति एतत् अध्यापकरूपे भवताम् अथ विद्यार्थिनां विचारे परिवर्त्तनस्य एकः महत्त्वपूर्णः अङ्गः अस्ति। विद्यार्थिनः स्वयमेव स्वानुभवप्रसंगम् उदाहरणेषु संयोज्य सामूहिकप्रस्तुतिकरणार्थं समर्थाः स्युः एतदर्थं तान् प्रोत्साहितान् कुर्यात्। तान् सामूहिकरूपे पुस्तकं पठनार्थं तथा यत्किञ्चिदपि ते पुस्तकात् अवगतवन्तः तत् व्याख्यायितुं, सूत्ररूपे च वर्णितुम् उत्साहितान् कुर्यात्। मूल्यांकन-पद्धतौ अपि अस्य कार्यस्य परिचयनं मानञ्च भवेत् तथा कक्षाम् एवं रीत्या समूहेषु विभजेत् यस्मात् सर्वे बालाः परस्परम् आनन्देन समूहाधिगमे स्वयोगदानं कुर्युः। यथा भवन्तः दृष्टवन्तः एव यत् विभिन्न-समूहाः विभिन्न-व्यूहरचनानाम् उपयोगं कुर्वन्ति। यदा ते स्व प्रारूपाणां विचाराणां वा प्रयोगं कुर्वन्ति तदानीं तत्र कतिपय तादृशः प्रभावशालिनः न भवन्ति यादृशः अपरे भवन्ति। एते सर्वे उपयुक्ताः सन्ति तथा बालैः सह तस्य विश्लेषणम् आवश्यकम्। विभिन्न-व्यूह-रचनानां प्रदर्शनं गणितीयविचारम् इतोऽपि गभीरतया प्रवर्धयते। प्रत्येकसमूहः स्वस्थित्या आरभते तदर्थं तस्मै अवसरप्रदानस्य आवश्यकता अस्ति।

गणिताधिगमस्य मुख्यविचारान् संक्षिप्तरूपेण प्रस्तूयते तथा वयम् इच्छामः यत् भवन्तः अपि स्वकक्ष्यायाम् एतत् ध्यायन्तु -

1. अवगमनार्थम् अन्वेषणविधिः एकः स्वाभाविकविधिः अस्ति येन माध्यमेन विद्यार्थिनः ज्ञानम् अर्जयन्ति तथा तस्य रचनां कुर्वन्ति। अनेन विधिना ज्ञानं प्राप्त्यर्थम् अनेकेषां प्रेक्षणानाम् उपयोगं कर्त्तुं भविष्यति। विद्यार्थिनां कृते विभिन्नप्रकारकाणां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुम् आवाहनपूर्वकम् अनुसन्धानं कर्तुं (अन्वेषणपूर्वकं, विभिन्न-उत्तरदायकं, प्रासंगिकं, ज्यामितिपर्यन्तं, अङ्कगणिते बीजीयसम्बन्धे च त्रुटिज्ञानम् इत्यादिकम्) आवश्यकता वर्त्तते।

2. बालानां कृते तर्कसंगतं तर्कं वितर्कञ्च कर्तुं तस्य अनुसरणं कर्तुं, प्रस्तुत-तर्क-वितर्कात् बहिः आगमनार्थं मार्गम् अन्वेषितुं, प्रमाणस्य का आवश्यकता ? इति बोद्धुम् आवश्यकता अस्ति। साम्प्रतं बालाः औपचारिक-अवस्थायां प्रवेशिताः। तान् बालकान् सर्जनात्मकतां कल्पनाञ्च धर्तुं तथा स्वगणितीयतर्कणं मौखिक-लिखितरूपेण कथयितुं प्रोत्साहनस्य आवश्यकता अस्ति।

3. गणित-कक्ष्यायां भाषायाः गणिताधिगमेन सह सम्बन्धं स्थापयेत्। बालकाः स्वभाषायाः अनुभवस्य च उपयोगं कृत्वा स्व विचारसम्बन्धे वार्त्तां कुर्युः। तान् स्वशब्दे भाषाप्रयोगार्थं प्रोत्साहयेत् परन्तु शनैः - शनैः औपचारिकभाषाणां संकेतानाञ्च प्रयोगार्थमपि प्रोत्साहयेत्।

4. संख्या पद्धतेः परिमेयसंख्यानां तेषां गुणधर्मस्य सामान्यीकरणं यावत् स्तरस्य अध्ययनं भवति तथा एका ईदृशी रेखा विकसिता भवति यस्यां गतानां सर्वासां पद्धतीनां परिमेयसंख्यायाः व्यापकरूपम् उपसमुच्चयरूपे सम्मिलितमस्ति। सामान्यीकरणं गणितीय-भाषायां प्रस्तुतिकरणे बालकाः एतत् पश्येयुः यत् बीजगणितम् अथ तस्य भाषा आधिक्येन विषयसामग्रीं सूक्ष्मसांकेतिकरूपं प्रस्तोतुं साहाय्यं करोति।

5. पूर्वकालः इव बालकेभ्यः इयम् अपेक्षा स्यात् यत् ते अधिकां समस्याम् उत्पादयेयुः तथा तासां समाधानं कुर्युः। वयम् आशास्महे यत् यथा-यथा बालकाः विभिन्न-प्रकारिकां जटिलां समस्याम् उत्पादयिष्यन्ति तथा-तथा स्वविचारान् प्रति तेषाम् आत्मविश्वासः वर्धिष्यते।

6. 8 कक्ष्यायाः पुस्तके गणितस्य विभिन्नरूपम् एकस्मिन् स्थाने आनेतुं प्रयासः कृतः तथा सामान्यविधिषु विशिष्टं ध्यानं दत्तम् अस्ति। ऐकिकविधिः, अनुपातः समानुपातश्च, कुसीदं लाभांशश्च एकस्यैव तर्कसंगतरूपरेखायाः भागः अस्ति। गणितस्य कस्यामपि शाखायाम् अज्ञातराशिं ज्ञातुम् अचराणां समीकरणानाञ्च विचारस्य आवश्यकता भवति।

वयम् आशास्महे यत् पुस्तकमिदं सानन्देन बालान् गणितं शिक्षितुं साहाय्यं करिष्यति तथा पुस्तके सम्मिलित-अवधारणां प्रति बालकेषु आत्मविश्वासः जागरिष्यति। वयं व्यक्तिगतरूपेण सामूहिकरूपेण च विचारार्थम् अवसरप्रदानस्य अनुशंसां कुर्मः।

अस्य पुस्तकस्य विषये भवतां विचाराणां परामर्शानाञ्च वयं स्वागतं कुर्मः तथा आशास्महे यत् भवता विकसिताः प्रश्नाः क्रियाकलापाश्च यान् भवन्तः अस्माकं पार्श्वे प्रेषयिष्यन्ति येन तान् पुस्तकस्य अग्रिमे संस्करणे सम्मेलितुं शक्नुमः। एतत् तदेव सम्भवम् अस्ति यदा भवन्तः बालकेभ्यः ध्यानपूर्वकं श्रवणार्थं कालं दास्यन्ति, न्यूनतां परिचिन्वन्ति तथा तेभ्यः स्वविचारं व्यक्तुम् अवसरं प्रदास्यन्ति।

पाठ्यपुस्तक-निर्माण-समितिः

अध्यक्षः-विज्ञानम् एवं गणितं परामर्शदातृसमूहः

जे. वी. नारलीकरः आचार्यः, अन्ताविश्वविद्यालय-केन्द्रम्, गणेशखिंडः, पुणे विश्वविद्यालयः पुणे (महाराष्ट्रः)

मुख्यपरामर्शदाता- हृदयकान्त दीवानः, विद्याभवन सोसाइटी, उदयपुरः (राजस्थानम्)

मुख्यसमन्वयकः -हुकुमसिंहः, आचार्यः विभागाध्यक्षश्च, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

सदस्याः

अवन्तिका दामः, टी.जी.टी., सी.आई.ई, एक्सपेरिमेंटल-विद्यालयः,

शिक्षा विभागः, देहली

अंजली गुप्ते, अध्यापिका, विद्याभवनपब्लिकविद्यालयः, उदयपुरः (राजस्थानम्)

आर.आत्मारामन्, गणितशिक्षापरामर्शदाता, टी.आई.मैट्रिक हायर सेकेंडरी विद्यालयः तथा ए.एम.टी.आई. चेन्नई (तमिलनाडुः)

आशुतोष के वझलवारः, प्रवाचकः (समन्वयकः आंग्लसंस्करणम्) डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली

एच.सी.प्रधानः, आचार्यः, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केन्द्रम्, टी.आई.एफ.आर, मुम्बई (महाराष्ट्रः)

के.ए.एस.एस.वी.कामेश्वर रावः, प्रवक्ता, रीजनल इंस्टीट्यूट् ऑफ एजुकेशन, श्यामला हिल्सः, भोपाल (म.प्र.)

पी.भास्कर कुमारः, पी.जी.टी. जवाहरनवोदयविद्यालयः, लेपाक्षी, मण्डलम् अनन्तपुरः, (आन्ध्र प्रदेशः)

बी.सी.बस्ती, वरिष्ठ प्रवक्ता, रीजनल इंस्टीट्यूट् ऑफ एजुकेशन, मैसूरः (कर्णाटकः)

महेन्द्र शङ्करः, प्रवक्ता (चयन श्रेणी) (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली मीना श्रीमाली, अध्यापिका, विद्याभवन-उच्चमाध्यमिकविद्यालयः, उदयपुरः (राजस्थानम्)

वी.पी.सिंहः, प्रवाचकः, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

राम अवतारः, आचार्यः, (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली

शैलेश शिराली,ऋषि वैली विद्यालयः, ऋषि वैली, मदन पल्ली (आन्ध्र प्रदेशः)

सुरेश कुमार सिंह गौतमः, आचार्यः डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली,सृजाता दासः, वरिष्ठ प्रवक्ता, एन.सी.ई.आर.टी, नवदेहली

श्रद्धा अग्रवालः, प्रधानाध्यापिका फ्लोरेट्स अन्ताराष्ट्रियविद्यालयः, पनकी,(उत्तर प्रदेशः)

हिन्दी-अनुवादकः-

डी.आर.शर्मा, पी.जी.टी,जवाहरनवोदयविद्यालयः, मुँगेशपुरः, देहली

बी.एम.गुप्ता, पी.जी.टी,(अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली

महेन्द्र शङ्करः, प्रवक्ता (चयन श्रेणी) (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली

राजकुमारधवनः, पी.जी.टी.पी.एण्ड टी. उच्चमाध्यमिकविद्यालयः, देहली

संजय कुमार बोल्या, वरिष्ठ अध्यापकः, विद्याभवनं बु.मा.विद्यालयः, उदयपुरः (राजस्थानम्)

समन्वयक-सदस्यः

आशुतोष के वझलवारः, प्रवाचकः, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली

आभारः

परिषद्, पाठ्यपुस्तकसमीक्षायाः कृते आयोजितायां कार्यशालायांभागग्रहितृणां निम्नलिखित-प्रतिभागिनां बहुमूल्ययोगदानार्थम् आभारं प्रकटयति। प्रदीप भारद्वाजः, टी.जी.टी. (गणितः), बालस्थली पब्लिक माध्यमिक विद्यालयः, किरारी, नांगलोई, नवदेहली; शंकर मिश्रः, गणित शिक्षकः, डेमॉन्स्ट्रेशन मल्टीपरपस विद्यालयः, आर.आई.ई., भुवनेश्वरः (ओडिसा); मनोहर एम.ढोकः, निरीक्षकः, एम.पी.देव.स्मृति लोकांची शाला, नागपुरः (महाराष्ट्रः); मंजीत सिंह जांगरा, गणित शिक्षकः, राजकीय-उच्च-माध्यमिक विद्यालयः, सेक्टर $\frac{4}{7}$, गुडगाँव (हरियाणा); के बालाजी, टी.जी.टी.(गणितः), केन्द्रीय विद्यालयः, सं.1, तिरुपतिः (आन्ध्र प्रदेशः); माला मणि, एमिटी अन्ताराष्ट्रियविद्यालयः, सेक्टर -44, नोएडा; ओमलता सिंहः,टी.जी.टी.(गणितः), प्रेजेन्टेशन कॉन्वेन्ट उच्च माध्यमिक विद्यालयः, दिल्ली; मंजू दत्ता, आर्मी पब्लिक विद्यालयः, धौला कुँआ, नवदेहली; निरुपमा साहनी,टी. जी.टी.(गणितः), श्री महावीर दिगंबर जैन उच्च माध्यमिक विद्यालयः, जयपुरः (राजस्थानम्); श्री नागेश मोने, प्रधानाध्यापकः, कांतीलाल पुरुषोत्तम दास शाह प्रशाला, विश्राम बागः, सांगली (महाराष्ट्रः); अनिल भास्कर जोशी, वरिष्ठ अध्यापकः (गणितः), मनुताई कन्या शाला, तिलक रोड, अकोला (महाराष्ट्रः); डॉ सुषमा जयरथः, प्रवाचिका, डी.डब्ल्यू.एस., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली; ईश्वर चन्द्रः, प्रवक्ता (चयन श्रेणी) (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली।

परिषद् डॉ. आर.पी.मौर्यः, प्रवाचकः, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली, डॉ. संजय मुद्गलः, प्रवक्ता, डी.ई.एस. एम., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली, डॉ.टी.पी.शर्मा, प्रवक्ता, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहली, एतैः प्रदत्तान् विचारान् प्रति एतेषां कृते आभारं प्रकटयति।

गणित-पाठ्यपुस्तक-विकास-समितेः कार्यशालायां योगदानार्थं परिषद् भागग्रहितृणां निम्नलिखित-प्रतिभागिनाम् आभारं प्रकटयति। श्री दीपक मंत्री, विद्याभवन बेसिक विद्यालयः, उदयपुरः। श्रीइंदरमोहनसिंहछाबरा बी. बी. ई. आर.सी, उदयपुरः।

परिषद् हिन्दी रूपान्तरणस्य पुनरावलोकनाय एन.सी.ई.आर.टी. संस्थायाम् आयोजितायां कार्यशालायां निम्नलिखित-प्रतिभागिनां बहुमूल्यटिप्पण्याः कृते आभारं प्रकटीकरोति। अशोक कुमार गुप्ता, पी.जी.टी., राजकीय सर्वोदय बालविद्यालयः, आनन्दवासः (लोक बिहारः), देहली; सुरेन्द्र कुमारः, टी.जी.टी. (गणितः), राजकीय सह शिक्षा माध्यमिक विद्यालयः, पंजाबी बस्ती, देहली; ज्योति त्यागी, टी.जी.टी., शारदा सेन आर.एस.के.वी., त्रिलोकपुरी,देहली; राजेन्द्र कुमार पूनीवाला, यू.टी.डी., गवर्मेन्ट सुभाष स्कूल फॉर एक्सलेंस, बुरहानपुर, (मध्य प्रदेशः); चन्द्रशेखर सिंहः, सनबीम एकेडमी, वाराणसी, (उत्तर प्रदेशः; जी.डी.ढलः, प्रवाचकः, (अवकाश प्राप्तः) एन.सी.ई.आर.टी.नवदेहली।

पाठ्यपुस्तक-विकास-समितेः कार्यशालायां सुविधां संसाधनञ्च प्रदातुं परिषद् विद्या भवन सोसायटी उदयपुरः, एतेषां संकायसदस्यान् प्रति आभारं प्रकटयामि। पुस्तकालय-सहायतायै निदेशकं सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C-SCE) दिल्ली-विश्वविद्यालयं प्रति परिषद् आभारं ज्ञापयति।

शैक्षिक-प्रशासनिकसहयोगाय परिषद् प्रो. हुकुमसिंहं विभाग-प्रमुखं डी.ई.एस.एम.एन.सी.ई.आर.टी. नवदेहलीं प्रति आभारं ज्ञापयति।

परिषद् सज्जाद हैदर अंसारी, राकेश कुमारः, प्रतुल वशिष्ठः डी.टी.पी.सञ्चालकः (ऑपरेटर), अवध किशोर सिंहः छायासम्पादकः (कॉपीएडीटर), अभिमनुमोहांतीपाठसंशोधकः (प्रूफरीडर)एन.सी.ई.आर.टी., दीपककपूरःसङ्गणकस्थानकप्रभारी (कम्प्यूटर स्टेशन प्रभारी) डी.ई. एस.एम., एन.सी. ई.आर. टी.,ए.पी.सी. कार्यालयः, प्रशासन विभागः, डी.ई.एस.एम., एन. सी. ई. आर.टी. तथा प्रकाशनविभागः एन.सी.ई.आर.टी. एतेषां कृते हार्दिकम् आभारं प्रकटयति।

भारतस्य संविधानम्

भागः 4 (क)

नागरिकाणां मूलकर्त्तव्यानि

अनुच्छेदः 51 क

मूलकर्त्तव्यम् - भारतस्य प्रत्येकनागरिकाणाम् एतत् कर्त्तव्यं भविष्यति यत् सः -

1. संविधानस्य पालनं कुर्यात् तस्य आदर्शाणां संस्थानां राष्ट्रध्वजस्य राष्ट्रगानस्य च आदरं कुर्यात्।
2. स्वतन्त्रतायै अस्माकं राष्ट्रिय-आन्दोलनं प्रेरयितुम् उच्च-आदर्शान् हृदये संस्थाप्य तेषां पालनं कुर्यात्।
3. भारतस्य सम्प्रभुताम्, अखण्डताम्, एकताञ्च संरक्षेत् ताम् अक्षुण्णाञ्च संस्थापयेत्।
4. देशस्य रक्षां कुर्यात् तथा आवाहने सति देशस्य सेवां कुर्यात्।
5. भारतस्य सर्वेषु जनेषु समरसतां समान-भ्रातृत्व-भावनाञ्च निर्मीयात्, या भावना धर्म-भाषा-प्रदेश-वर्गाधारित-भेदभावात् अतीता स्यात् तथा तादृशीं प्रथां त्यजेत् या प्रथा महिलानां सम्मान-विरुद्धा स्यात्।
6. अस्माकं सामासिक-संस्कृतेः गौरवशालिन्याः परम्परायाः महत्त्वं जानीयात् तथा तस्याः परिरक्षणं कुर्यात्।
7. प्राकृतिक-पर्यावरणस्य यस्य अन्तर्गते वनानि, सरोवराः, नद्यः, वन्यजीवाश्च सन्ति तान् रक्षेत् संवर्धेच्च तथा प्राणिमात्रं प्रति दयाभावं संदर्शयेत्।
8. वैज्ञानिक-दृष्टिकोणस्य, मानववादस्य, ज्ञानार्जनस्य, संशोधनस्य च भावनां विकसेत्।
9. सार्वजनिक-सम्पत्तिं संरक्षेत् अथ हिंसातः दूरं तिष्ठेत्।
10. व्यक्तिगत-सामूहिक-गतिविधिषु सर्वेषु क्षेत्रेषु उत्कर्षं प्रति वर्धितुं सततं प्रयासं कुर्यात्, यस्मात् राष्ट्रं निरन्तरं वर्धमानं प्रयत्नानाम् उपलब्धीनां नव-उत्तुङ्गतां स्पृशेत् तथा
11. यदि माता-पिता अथवा संरक्षकः अस्ति, षड् वर्षतः चतुर्दशवर्ष-पर्यन्तं स्व यथास्थिति-बालकाय-प्रतिपाल्याय वा शिक्षायाः अवसरं प्रदद्यात्।

अनुक्रमणिका

	आमुखम्	v
	प्रस्तावना	vii
	शिक्षकाय-शब्दद्वयम्	ix
अध्यायः - 1	परिमेय-संख्याः	1
अध्यायः - 2	एकचरणान्वितं रैखिक-समीकरणम्	25
अध्यायः - 3	चतुर्भुजानां बोधनम्	41
अध्यायः - 4	प्रायोगिक-ज्यामितिः	63
अध्यायः - 5	गणनानां प्रबन्धनम्	73
अध्यायः - 6	वर्गः वर्गमूलञ्च	95
अध्यायः - 7	घन एवं घनमूलम्	117
अध्यायः - 8	राशीनां तुलना	125
अध्यायः - 9	बीजीयव्यञ्जकः सर्वसमिकाश्च	145
अध्यायः - 10	दृढाकाराणां चित्रणम्	163
अध्यायः - 11	क्षेत्रमितिः	177
अध्यायः - 12	घातांकः घातश्च	201
अध्यायः - 13	सरलः प्रतिलोम-समानुपातश्च	209
अध्यायः - 14	गुणनखण्डनम्	225
अध्यायः - 15	आलेखद्वारा परिचयः	241
अध्यायः - 16	संख्याभिः सह क्रीडनम्	259
	उत्तरमाला	273

भारतस्य संविधानम्

भागः-3 (अनुच्छेदः 12-35)

(अनिवार्य-नियमः, कश्चिदपवादः तथा युक्तियुक्तनिर्बन्धाधीनः)

द्वारा प्रदत्तः

मूल-अधिकारः

समताया अधिकारः

- विधेः समक्षं तथा विधीनां समानं संरक्षणम्
- धर्मस्य, मूलवंशस्य, जातेः, लिंगस्य अथवा जन्मस्थानस्य आधारे
- लोकनियोजन-विषये
- अस्पृश्यतायाः उपाधीनाञ्च अन्तः

स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अभिव्यक्तेः, सम्मेलनस्य, संघस्य, सञ्चरणस्य, निवासस्य, वृत्तेश्च स्वातन्त्र्यम्
- अपराधानां कृते दोष-सिद्धि-सम्बन्धे संरक्षणम्
- प्राणानां दैहिक-स्वतन्त्राणाञ्च संरक्षणम्
- षड्तः चतुर्दशवर्षपर्यन्तानां बालानां कृते निःशुल्क-अनिवार्य-शिक्षा
- कासुचित् दशासु बन्धनात् निरोधनाच्च संरक्षणम्

शोषणविरुद्धाधिकारः

- मानवानां दुर्व्यापारस्य बलपूर्वकश्रमस्य च प्रतिषेधः
- परिसंकटमयकार्येषु बालानां नियोजन-प्रतिषेधः

धर्मस्य स्वातन्त्र्य-अधिकारः

- अन्तःकरणस्य तथा धर्मस्य अबाधरूपेण आमाननस्य, आचरणस्य, प्रचारस्य च स्वतन्त्रता
- धार्मिककार्याणां प्रबन्धस्य स्वतन्त्रता
- कस्यापि विशिष्ट-धर्मस्य अभिवृद्धये करदान-सम्बन्धे स्वतन्त्रता
- राज्यनिधितः पूर्णतः पोषित-शिक्षासंस्थासु, धार्मिक-शिक्षायां, धार्मिक-उपासनायाञ्च उपस्थिति-सम्बन्धे स्वातन्त्रता

संस्कृति-शिक्षा-सम्बन्धाधिकारः

- अल्पसंख्यक-वर्गाणां स्वभाषा-लिपि-संस्कृति-विषयकाणां हितानां संरक्षणम्
- अल्पसंख्यक-वर्गद्वारा स्वशिक्षा-संस्थानानां स्थापनं प्रशासनञ्च

संवैधानिक-उपचाराणाम्-अधिकारः

- उच्चतम-न्यायालयस्य, उच्च-न्यायालयस्य च निर्देशम् आदेशम् अथवा रिटद्वारा प्रदत्त-अधिकारं प्रवर्तयितुम् उपचारः

अध्यायः 1

परिमेय-संख्याः

1.1 भूमिका

गणिते वयं प्रायः साधारणं समीकरणं पश्यामः। उदाहरणार्थं समीकरणम्

$$x + 2 = 13 \quad (1)$$

इति$x = 11$ इत्यस्य कृते समाधानं भवति यतो हि x इत्यस्य इदं मानम् एतत् समीकरणं सन्तोषयति। उत्तरम् 11, एका प्राकृतसंख्या वर्त्तते। अपर पक्षे समीकरणम्

$$x + 5 = 5 \quad (2)$$

इत्यस्य उत्तरं शून्यम् अस्ति या एका पूर्णसंख्या अस्ति। यदि वयं केवलं प्राकृत-संख्यां यावत् सीमिताः भवेम तर्हि समीकरणं (2) समाधातुं न शक्नुमः। समीकरणं (2) सदृशं समीकरणं समाधातुं वयं प्राकृत-संख्यानां समूहे शून्यं मेलितवन्तः तथा एतं नवीनं समूहं पूर्णसंख्या नाम्ना प्रख्यापितवन्तः। यद्यपि

$$x + 18 = 5 \quad (3)$$

सदृशं समीकरणं समाधातुं पूर्णसंख्या अपि पर्याप्ता नास्ति। किं भवन्तः जानन्ति 'किमर्थम्'? अस्माकं संख्या -13 इत्यस्य आवश्यकता अस्ति या पूर्णा संख्या नास्ति। एतेन वयं पूर्णांकः (धनात्मकः ऋणात्मकश्च) विषये प्रेरिताः। अवधानं दीयतां धनात्मकः पूर्णांकः प्राकृतसंख्यानाम् अनुरूपः अस्ति। भवन्तः विचारितुं शक्नुवन्ति यत् साधारण-समीकरणानि समाधातुम् अस्माकं पार्श्वे उपलब्ध-पूर्णाङ्कानां सूचीषु पर्याप्ताः संख्याः सन्ति। निम्नलिखित-समीकरणानां कृते विचारयामः -

$$2x = 3 \quad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \quad (5)$$

एतेषां समाधानं वयं पूर्णाङ्केषु न ज्ञातुं शक्नुमः (एतस्य निरीक्षणं करोतु)।

समीकरणं (4) इति समाधातुं संख्या $\frac{3}{2}$ तथा (5) समाधातुं संख्या $\frac{-7}{5}$ इत्यस्य आवश्यकता अस्ति।

एतेन वयं परिमेय संख्यानांसमूहं प्रति अग्रसराः भवेम। वयं पूर्वमेव परिमेय-संख्या-विषये मूलसंक्रियां पठितवन्तः। एतावत् पर्यन्तं वयं विभिन्नप्रकारिकां संख्यां पठितवन्तः तासां संक्रियाणां कञ्चित् गुणधर्मम् अन्वेषितुं प्रयत्नं कुर्मः।

1.2 परिमेयसंख्यानां गुणधर्माः

1.2.1 संवृताः

(i) पूर्णसंख्याः

आगच्छन्तु, एकवारं पुनः संक्षेपेण पूर्णसंख्यानां कृते सर्वासां संक्रियाणामुपरि संवृतगुणधर्मस्य चर्चां कुर्मः ।

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
संकलनम्	0+5 = 5, एका पूर्णासंख्या अस्ति । 4+7 = ... किमेषा एका पूर्णासंख्या अस्ति ? व्यापकरूपेण केचित् द्वे संख्ये a तथा bइत्यस्य कृते a+b एका पूर्णा संख्या अस्ति ।	पूर्णाः संख्याः संकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति ।
व्यवकलनम्	5 - 7 = -2, या एका पूर्णासंख्या नास्ति ।	पूर्णाः संख्याः व्यवकलनान्तर्गते संवृताः न सन्ति ।
गुणाकारः	0 × 3 = 0, एका पूर्णासंख्या अस्ति । 3 × 7 =.... किमेषा एका पूर्णासंख्या अस्ति ? व्यापकरूपेण यदि a तथा b केचित् द्वे पूर्णसंख्येस्तः तर्हि तस्य गुणनफलं ab एका पूर्णा संख्या अस्ति ।	पूर्णाः संख्याः गुणाकारान्तर्गते संवृताः सन्ति ।
भागाकारः	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, एका पूर्णासंख्या नास्ति ।	पूर्णाः संख्याः भागाकारान्तर्गते संवृताः न सन्ति ।

प्राकृतसंख्यानां कृते सर्वासां चतसृणां संक्रियाणाम् अन्तर्गतं संवृतगुणस्य अन्वेषणं कुर्वन्तु ।

(ii) पूर्णाङ्काः

आगच्छन्तु, इदानीं वयं तासां संक्रियाणां स्मरणं कुर्मः यस्याः अन्तर्गते पूर्णाङ्कः संवृतः अस्ति ।

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
संकलनम्	-6 + 5 = -1, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति । किं - 7 + (-5) एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? किं 8 + 5 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a+b एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।	पूर्णाङ्कः संकलनान्तर्गतेसंवृतः अस्ति ।

व्यवकलनम्	7 - 5 = 2, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं 5 - 7 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? -6 - 8 = -14, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। -6 - (- 8) = 2, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं 8 - (- 6) एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a-b इत्यपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। परीक्षणं कुर्वन्तु किं b-a अपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ?	पूर्णाङ्कः व्यवकलनान्तर्गते संवृतः अस्ति।
गुणाकारः	5 × 8 = 40, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं - 5 × 8 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? - 5 × (-8) = 40, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a × b इत्यपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।	पूर्णाङ्कः गुणाकारान्तर्गते संवृतः अस्ति।
भागाकारः	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, एकः पूर्णाङ्कः नास्ति।	पूर्णाङ्कः भागाकारान्तर्गते संवृतः नास्ति।

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् पूर्णसंख्याः संकलनान्तर्गते गुणाकारान्तर्गते च संवृताः सन्ति परन्तु भागाकारान्तर्गते व्यवकलनान्तर्गते च संवृताः न सन्ति तथापि पूर्णाङ्कः संकलनान्तर्गते, व्यवकलनान्तर्गते, गुणाकारान्तर्गते च संवृताः सन्ति परन्तु भागाकारान्तर्गते संवृताः न सन्ति।

(iii) परिमेयसंख्याः

स्मरन्तु ईदृशी संख्या परिमेय संख्या भवति यां रूपे लेखितुं शक्नुवन्ति, यत्र p तथा q पूर्णाङ्कः अस्ति एवं $q \neq 0$ अस्ति। उदाहरणार्थम् $-\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ परिमेय-संख्याः सन्ति। यतो हि संख्याः 0, - 2, 4, $\frac{P}{q}$, रूपे लेखितुं शक्यते अत एव एताः परिमेय-संख्याः सन्ति। (अस्याः परीक्षणं कुर्वन्तु)।

(a) भवन्तः जानन्त्येव यत् परिमेय-संख्यां कथं योजयन्ति ? आगच्छन्तु केषाञ्चित् युग्मानां योगं जानीमः -

$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$ (एका परिमेया संख्या)

$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=...$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=...$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

वयं पश्यामः यत् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः योगः एकपरिमेय-संख्या अस्ति । केषाञ्चित् अधिकपरिमेय-संख्यानां युग्मार्थम् एतस्य परीक्षणं करोतु । एवं रीत्या वयं वदामः यत् परिमेय-संख्याः संकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते a+b एका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(b) किं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः योगः अन्तरः अपि एका परिमेय-संख्या भविष्यति ?

वयं प्राप्नुमः $\frac{-5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{-5\times3-2\times7}{21}=\frac{-29}{21}$ (एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{5}{8}-\frac{4}{5}=\frac{25-32}{40}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{3}{7}-\left(\frac{-8}{5}\right)=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

केषाञ्चित् अधिकपरिमेय-संख्यानां युग्मार्थम् एतस्य परीक्षणं करोतु । एवं रीत्या वयं प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्याः व्यवकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये aतथा bइत्यस्य कृते a -bएका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(c) आगच्छन्तु, इदानीं वयं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः गुणनफलस्य चर्चां कुर्मः ।

$\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$ (उभयं गुणनफलं परिमेय-संख्ये स्तः)

$-\frac{4}{5}\times\frac{-6}{11}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

परिमेय-संख्यानां काञ्चन् युग्मान् गृह्णातु अथ परीक्षणं करोतु यत् तेषां गुणनफलमपि एका परिमेय-संख्या अस्ति । अतः वयम् एतत् वक्तुं पारयामः यत् परिमेय-संख्याः गुणाकारान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते a × b एका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(d) वयं लिखामः यत् $\frac{-5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-25}{6}$ (एका परिमेया संख्या अस्ति)

$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{-3}{8}\div\frac{-2}{3}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् परिमेय-संख्याः भागाकारान्तर्गते संवृताः सन्ति ? वयं जानीमः यत् कस्यापि परिमेय-संख्यायाः a इत्यस्य कृते a ÷ 0 परिभाषितः न अस्ति । अतः परिमेय-संख्याः भागाकारान्तर्गते संवृताः न सन्ति तथापि यदि वयं शून्यं न मेलयामः चेत् अपरासां सर्वासां परिमेय-संख्यानां समूहः भागाकारान्तर्गते संवृतः अस्ति ।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयेत् ।

संख्या:	अन्तर्गते संवृता: सन्ति			
	योगस्य	व्यवकलनस्य	गुणाकारस्य	भागाकारस्य
परिमेय-संख्या:	आम्	आम्	.....	न
पूर्णाङ्क:	.....	आम्	.....	न
पूर्णसंख्या:	.....	.....	आम्	.....
प्राकृतसंख्या:	.....	न	.....	.....

1.2.2 क्रम-विनिमेयता

(i) पूर्णसंख्या:

निम्नलिखित-सारण्या: रिक्तस्थानानि पूरयन्त: विभिन्न-संक्रियाणामन्तर्गते पूर्णसंख्याया: स्मरणं कुर्वन्तु -

संक्रिया:	संख्या:	टिप्पणी
योग:	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = \ldots + \ldots = \ldots$ केचित् द्वे पूर्णसंख्ये a तथा b इत्यस्य कृते $a+b = b + a$	योगक्रम: विनिमेय: अस्ति ।
व्यवकलनम्	.....	व्यवकलनक्रम: विनिमेय: नास्ति ।
गुणाकार:	.....	गुणाकारक्रम: विनिमेय: अस्ति ।
भागाकार:	.....	भागाकारक्रम: विनिमेय: नास्ति ।

परीक्षणं करोतु किं प्राकृतसंख्यानां कृते एते संक्रियक्रमा: विनिमेया: सन्ति ।

(ii) पूर्णाङ्क:

निम्नलिखित-सारण्या: रिक्तस्थानानि पूरयतु तथा पूर्णाङ्कार्थं विभिन्न-संक्रियाणां क्रमविनिमेयताया: परीक्षणं करोतु -

संक्रिया:	संख्या:	टिप्पणी
योग: व्यवकलनम् गुणाकार: भागाकार:	..... किं $5 - (-3) = -3 - 5$?	योगक्रम: विनिमेय: अस्ति । व्यवकलनक्रम: विनिमेय: नास्ति । गुणाकारक्रम: विनिमेय: अस्ति । भागाकारक्रम: विनिमेय: नास्ति ।

(iii) परिमेयसंख्या:

(a) **योग:**

भवन्तः जानन्ति यत् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः संकलनं कथं भवति। आगच्छन्तु, अत्र वयं काञ्चन-युग्मान् संकलयामः -

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ तथा } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

अत एव, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

एतदतिरिच्य $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots$ तथा $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$

किम् $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)?$

किम् $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)?$

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् द्वे परिमेय-संख्ये कस्मिन्नपि क्रमे योजितुं शक्यते। वयं कथयामः यत् परिमेय-संख्यार्थं योगक्रमः विनिमेयः अस्ति। अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये aतथा b इत्यस्य कृते a + b = b + a।

(b) **व्यवकलनम्**

किम् $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ अस्ति ?

किम् $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ अस्ति ?

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् परिमेय-संख्यार्थं व्यवकलनक्रमः विनिमेयः नास्ति।

(c) **गुणाकार:**

वयं प्राप्नुमः, $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

किम् $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ अस्ति ?

एतादृशानां गुणनफलानां कृते परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् परिमेय-संख्यार्थं गुणाकारक्रमः विनिमेयः अस्ति। व्यापकरूपेण केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते $a\times b = b \times a$ भवति।

(d) **भागाकार:**

किम् $\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ अस्ति ?

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् उभयोः पक्षयोः व्यञ्जकः समानः नास्ति।
अत एव परिमेय-संख्यानां कृते भागाकारक्रमः विनिमेयः नास्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयेत् ।

संख्याः	क्रमविनिमेयः			
	योगाय	व्यवकलनाय	गुणाकाराय	भागाकाराय
परिमेयसंख्याः	आम्	.....	.....	.....
पूर्णाङ्कः	.....	न	.....	.....
पूर्णसंख्याः	.....	.....	आम्	.....
प्राकृतसंख्याः	.....	.....	.....	न

1.2.3 साहचर्यता (सहचारिता)

(i) पूर्णसंख्याः

निम्नलिखित-सारणी-माध्यमेन पूर्णसंख्यार्थं चतसृणां संक्रियाणां साहचर्यतां स्मरन्तु -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः	.....	योगः साहचर्यः अस्ति ।
व्यवकलनम्	.....	व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति ।
गुणाकारः	किं $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? किं $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणाकारः साहचर्यः अस्ति ।
भागाकारः	.....	भागाकारः साहचर्यः नास्ति ।

एतां सारणीं पूरयन्तु तथा स्तम्भे दत्तटिप्पणीं सत्यापितां कुर्वन्तु । प्राकृत-संख्यार्थं विभिन्न-सक्रियाणां साहचर्यतायाः स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु ।

(ii) पूर्णाङ्कः

पूर्णाङ्कानां कृते चतसृणां संक्रियाणां साहचर्यतां निम्नलिखित-सारणी-माध्यमेन द्रष्टुं शक्यते -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः	किं $(-2) + [3+(-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ अस्ति ? किं $(-6) + [(-4) + (-5)] = [(-6)+(-4)]+(-5)$ अस्ति ? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a + (b+c) = (a+b) + c$	योगः साहचर्यः अस्ति ।

व्यवकलनम्	किं 5 - (7 - 3) = (5 - 7) -3 अस्ति ?	व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति।
गुणाकारः	किं 5 ×[(- 7) × (- 8)] = [5 ×(-7)] × (-8) अस्ति ? किं (- 4) × [(-8) × (-5)] [(- 4) × (-8)] ×(- 5) अस्ति ? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते a × (b × c) = (a × b) × c	गुणाकारः साहचर्यः अस्ति।
भागाकारः	किं [(-10) ÷ 2] ÷ (- 5) = (- 10) ÷ [2 ÷(-5)] अस्ति ?	भागाकारः साहचर्यः नास्ति।

(iii) परिमेयसंख्याः

(a) योगः

वयं प्राप्नुमः -

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

अत एव, $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

जानन्तु $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ तथा $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

किम् एतौ द्वौ अपि योगौ समानौ स्तः ?

काञ्चित् परिमेय-संख्याम् इतोऽपि गृह्णन्तु, उपर्युक्त-उदाहरणानाम् इव तां योजयन्तु तथा पश्यन्तु किं द्वौ अपि योगौ समानौ स्तः ? वयं प्राप्नुमः यत् परिमेयसंख्यार्थं योगः साहचर्यः अस्ति। अर्थात् कासाञ्चित् तिसृणां परिमेयसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते a + (b + c) = (a + b) + c।

(b) व्यवकलनम्

किं $= \frac{-2}{3}+\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{-2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ अस्ति ?

स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु। परिमेय-संख्यानां कृते व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति।

(c) गुणाकारः

आगच्छन्तु, वयं गुणाकारस्य कृते साहचर्यतायाः परीक्षणं कुर्मः।

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\ldots$$

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

किं $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$ अस्ति ?

काञ्चन परिमेय-संख्यां गृह्णन्तु अथ स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु। वयं प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्यानां कृते गुणाकारः साहचर्यः अस्ति। अर्थात् कासाञ्चित् तिसृणां परिमेय-संख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$।

(d) भागाकारः

आगच्छन्तु पश्यामः यत् -

$\frac{1}{2}\div\boxed{\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}}=\boxed{\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)}\div\frac{2}{5}$ अस्ति ? वयं प्राप्नुमः,

वाम-पक्षः $=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ इत्यस्यव्युत्क्रमः $\frac{5}{2}$ अस्ति)

$=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)$

$=\ldots\ldots$

पुनः दक्षिणपक्षः $=\boxed{\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)}\div\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}$

$=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\ldots$

किं वामपक्षः = दक्षिणपक्षः अस्ति ? स्वयमेव परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् परिमेय-संख्यानां कृते भागाकारः साहचर्यः नास्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयेयुः ।

संख्याः	साहचर्यः			
	योगाय	व्यवकलनाय	गुणाकाराय	भागाकाराय
परिमेय-संख्याः	.....	.....	.....	न
पूर्णाङ्कः	.....	.....	आम्	.....
पूर्णसंख्याः	आम्	.....	.....	.....
प्राकृतसंख्याः	.....	न	.....	.....

उदाहरणम् 1 - जानन्तु $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

उत्तरम् - $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462}+\left(\frac{-252}{462}\right)+\left(\frac{-176}{462}\right)+\left(\frac{105}{462}\right)$

(विशेषं लिखन्तु यत् 7, 11, 21 तथा 22 इत्यस्य ल.स.प. 462 अस्ति ।)

$= \frac{198-252-176+105}{462} = \frac{-125}{462}$

वयम् एतत् निम्नलिखित-रीत्या अपि समाधातुं शक्नुमः -

$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$

$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$ = (क्रमविनिमेयतायाः साहचर्यतायाश्च उपयोग-द्वारा)

$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$

(7 तथा 21 इत्यस्य ल.स.प. 21 अस्ति । 11 तथा 22 इत्यस्य ल.स.प. 22 अस्ति ।)

$= \frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}+\frac{-125}{462}$

किं भवन्तः विचारयन्ति यत् क्रमविनिमेयतायाः अथ साहचर्यतायाः गुणधर्मयोः सहायतया परिकलनं सरलं जातम् ?

उदाहरणम् 2 - जानन्तु $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$

समाधानं वयं प्राप्तवन्तः

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4\times3}{5\times7}\right)\times\left(\frac{15\times(-14)}{16\times9}\right)$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\left(\frac{-12\times(-35)}{35\times24}\right)=\frac{1}{2}$$

वयम् एतत् निम्नलिखित-रीत्या अपि समाधातुं शक्नुमः -

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$\left(\frac{-4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\boxed{\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)}$$ (क्रमविनिमेयतायाः साहचर्यतायाश्च उपयोग-द्वारा)

$$\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 शून्यं (0) इत्यस्य भूमिका

निम्नलिखितेषु विचारं कुर्वन्तु -

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (शून्यं पूर्णसंख्यायां संकलनम्)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (शून्यं पूर्णाङ्के संकलनम्)

$\frac{-2}{7}+\ldots=0+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{-2}{7}$ (शून्यं परिमेय-संख्यायां संकलनम्)

भवन्तः पूर्वमपि एतादृशं योगं ज्ञातवन्तः ? एतादृशम् इतोऽपि जानन्तु। भवन्तः किं पश्यन्ति ? भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् पूर्णसंख्यायां शून्यं योजने सति योगः पुनः पूर्णसंख्या एव भवति। एतत् तथ्यं पूर्णाङ्केभ्यः परिमेय-संख्याभ्यश्च सत्यम् अस्ति।

व्यापकरूपेण -

$a + 0 = 0 + a = a$, (यत्र a एका पूर्णासंख्या अस्ति।)

$b + 0 = 0 + b = b$, (यत्र b एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।)

$c + 0 = 0 + c = c$, (यत्र c एका परिमेय-संख्या अस्ति।)

परिमेयसंख्यायाः योगाय शून्यम् एकं तत्समकम् अस्ति। एतत् पूर्णाङ्कानां पूर्ण-संख्यानाञ्च कृते योज्यं तत्समकम् अस्ति।

1.2.5 1 इत्यस्य भूमिका

वयं प्राप्नुमः यत्

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \text{ (पूर्णसंख्यया सह 1 इत्यस्य गुणाकारः)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ?

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् यदा कयापि परिमेय-संख्यया सह 1 संख्यायाः गुणाकारं करिष्यन्ति तदा तामेव संख्यां भवन्तः गुणफलरूपेण प्राप्स्यन्ति । कासाञ्चित् परिमेय-संख्यानां कृते एतस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः a इत्यस्य कृते $a \times 1 = 1 \times a = a$ भविष्यति । वयं कथयामः यत् 1 परिमेय-संख्यायाः कृते गुणनात्मकः तत् समकः अस्ति । किं 1 पूर्णाङ्कानां परिमेय-संख्यानाञ्च कृतेऽपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

यदि कश्चिद् गुणधर्मः परिमेय-संख्यानं कृते सत्यम् अस्ति तर्हि किं सः गुणधर्मः पूर्णाङ्कानां परिमेय-संख्यानाञ्च कृतेऽपि सत्यं भविष्यति ? कः गुणधर्मः अस्य कृते सत्यं भविष्यति कः सत्यं न भविष्यति ?

1.2.6 एक-संख्यायाः ऋणात्मकः

पूर्णाङ्कानाम् अध्ययन-काले भवन्तः पूर्णाङ्कानाम् ऋणात्मकं प्राप्तवन्तः । 1 इत्यस्य ऋणात्मकः कः ? एतत् - 1 अस्ति, यतो हि $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$ अस्ति । अतः (-1) इत्यस्य ऋणात्मकः किम् ? एतत् 1 भविष्यति ।

एतदतिरिच्य $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ अस्ति । एवं प्रकारेण वयं कथयामः यत् -2 इत्यस्य ऋणात्मकः अथवा योज्यप्रतिलोमः 2 अस्ति यः विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति । व्यापकरूपेण कस्यापि पूर्णाङ्कस्य aइत्यस्य कृते $a + (-a) = (-a) + a = 0$, एवं प्रकारेण - aइत्यस्य ऋणात्मकः aअस्ति तथा aइत्यस्य ऋणात्मकः - a वर्त्तते ।

कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः $\frac{2}{3}$ कृते वयं प्राप्नुमः यत् -

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2+(-2)}{3} = 0$$

एतदतिरिच्य $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ (कथम् ?)

एवमेव $\frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$$\ldots + \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) + \ldots = 0$$

व्यापकरूपेण कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः $\frac{a}{b}$ इत्यस्याः कृते $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ प्राप्तः अस्ति। वयं कथयामः यत् इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः $-\frac{a}{b}$ अस्ति तथा $\left(-\frac{a}{b}\right)$ इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः $\frac{a}{b}$ अस्ति।

1.2.7 व्युत्क्रमः

भवन्तः $\frac{8}{21}$ इति संख्यां कया परिमेय-संख्यया सह गुणाकारं करिष्यन्ति यस्मात् गुणनफलं 1 भवेत् ?

स्पष्टरूपेण इत्यनेन यतो $\frac{8}{21}$ हि $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$ अस्ति।

एवमेव $\frac{-5}{7}$ इति संख्यां $\frac{7}{-5}$ इत्यनेन सह गुणाकारं कुर्यात् यस्मात् गुणनफलं 1 प्राप्नोत्।

वयं कथयामः यत् $\frac{8}{21}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{21}{8}$ अस्ति तथा $\frac{-5}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{7}{-5}$ अस्ति।

किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् शून्यस्य व्युत्क्रमः कः अस्ति ? किं काचित् एषा संख्या अस्ति यां शून्येन साकं गुणाकारकरणेन 1 प्राप्नोत्। अतः शून्यस्य कोऽपि व्युत्क्रमः नास्ति। वयं कथयामः यत् एका

परिमेया संख्या अपरा $\frac{c}{d}$ संख्यायाः $\frac{a}{b}$ इत्यस्याः व्युत्क्रमः अथवा गुणात्मकः आगच्छति यदि अस्ति। $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$

1.2.8 परिमेय-संख्यानां कृते गुणनयोगे वितरकता

एतत् तथ्यं ज्ञातुं परिमेय-संख्यां $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{-5}{6}$ गृह्णन्तु।

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

एतदतिरिच्य $=\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times2}{4\times3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

तथा $\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}=\frac{5}{8}$

अत एव $\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

> संकलने व्यवकलने च गुणाकारस्य वितरकता
>
> सर्वासां परिमेय-संख्यानां a, b तथा c इत्येतासां कृते a (b + c) = ab + ac, a (b - c) = ab - ac

अतः $\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right\}=\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$

प्रयासं करोतु

वितरकतायाः उपयोगेन निम्नलिखितस्य मानं ज्ञातं करोतु -

(i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$

यदा भवन्तः वितरकतायाः उपयोगं कुर्वन्ति तदा एकं गुणनफलं गुणनफलद्वयस्य योगरूपे अथवा अन्तररूपे विभक्तं कुर्वन्ति।

उदाहरणम् 3 निम्नलिखितस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखतु -

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

समाधानम् -

(i) $\frac{7}{19}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{-7}{19}$ अस्ति यतो हि $\frac{-7}{19}+\frac{7}{19}=\frac{-7+7}{19}=\frac{0}{19}=0$ अस्ति।

(ii) $\frac{21}{112}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः अस्ति। $\frac{-21}{112}$ (परीक्षणं करोतु)

उदाहरणम् 4 सत्यापितं करोतु यत् निम्नलिखितस्य कृते - (- x) तथा x समानम् अस्ति।

(i) $x=\frac{13}{17}$ (ii) $x=\frac{-21}{31}$

समाधानम् -

(i) वयं प्राप्तवन्तः $x=\frac{13}{17}$

$x=\frac{13}{17}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $x=\frac{-13}{17}$ अस्ति, यतो हिअस्ति $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$।

समीकरणं $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$, प्रदर्शयति यत् $\frac{-13}{17}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{13}{17}$ अस्ति।

अथवा - $\left(\frac{-13}{17}\right)=\frac{13}{17}$, अर्थात् - (- x) = x

(ii) $x=\frac{-21}{31}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमःअस्ति $-x=\frac{-21}{31}$, यतो हि अस्ति $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$।

समीकरणं $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$, प्रदर्शयति यत् $\frac{21}{31}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{-21}{31}$ अस्ति। अर्थात् - (- x) = x अस्ति।

उदाहरणम् 5 ज्ञातं करोतु - $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

समाधानम् - $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (क्रमविनियमता द्वारा)

$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14}$ (वितरकता द्वारा)

$=\frac{-3}{7}\times 1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$

प्रश्नावली 1.1

1. उचितगुणधर्माणाम् उपयोगेन निम्नलिखितस्य मानं ज्ञातं कुर्वन्तु।

(i) $-\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

2. निम्नलिखिते प्रत्येकस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

3. निम्नलिखिते प्रत्येकस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) $x=\frac{11}{15}$ (ii) $x=-\frac{13}{17}$ इत्यस्य कृते सत्यापितं कुर्वन्तु - $(-x)=x$

4. निम्नलिखितस्य गुणनात्मकं प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$

(v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. निम्नलिखिते प्रत्येकं गुणनान्तर्गते कृत-उपयोगस्य गुणधर्मस्य नाम लिखन्तु।

(i) $\frac{-4}{5}\times 1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$ (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$

6. इति $\frac{6}{13}$ इत्यस्य $\frac{-7}{16}$ व्युत्क्रमेण सह गुणाकारं कुर्वन्तु।

7. ज्ञापयन्तु कस्य गुणधर्मस्य सहायता द्वारा भवन्तः $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ इति $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$ एवं रूपे अभिकलनं कुर्वन्ति।

8. किं $-1\frac{1}{8}$ इत्यस्य गुणात्मकः प्रतिलोमः $\frac{8}{9}$ अस्ति ? कथम् अथवा कथं नहि ?

9. किं $3\frac{1}{3}$ इत्यस्य गुणात्मकः प्रतिलोमः 0.3 अस्ति ? कथम् अथवा कथं नहि ?

10. लिखन्तु -

I. एतादृशीं परिमेय-संख्यां यस्याः कोऽपि व्युत्क्रमः न भवेत् ।

II. परिमेय-संख्याः याः स्व व्युत्क्रमस्य समानाः सन्ति ।

III. परिमेय-संख्यां या स्व ऋणात्मक-समाना अस्ति ।

11. रिक्त-स्थानानि पूरयन्तु ।

I. शून्यस्य व्युत्क्रमः ---------- अस्ति ।

II. संख्याः ---------- तथा ---------- स्वस्य व्युत्क्रमः अस्ति ।

III. ---------- 5 इत्यस्य व्युत्क्रमः अस्ति ।

IV. इत्यस्य व्युत्क्रमः ---------- अस्ति ।

V. द्वयोः परिमेय-संख्ययोः गुणनफलं सर्वदा ---------- अस्ति ।

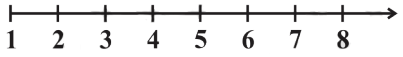
VI. कस्याः अपि धनात्मक-परिमेय-संख्यायाः व्युत्क्रमः ---------- अस्ति ।

1.3 परिमेय-संख्यानां संख्यारेखायां निरूपणम्

भवन्तः प्राकृत-संख्यां, पूर्ण-संख्यां, पूर्णाङ्कं,परिमेय-संख्याञ्च संख्या-रेखायां निरूपितुं शिक्षितवन्तः । वयं तस्याः पुनरावृत्तिं कुर्मः ।

प्राकृत-संख्याः

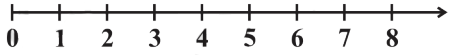
(i)



इयं रेखा केवलं 1 इत्यस्य दक्षभागे अपरिमित-रूपेण वर्धते ।

पूर्णसंख्याः

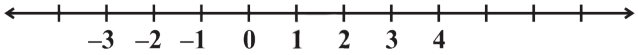
(ii)



इयं रेखा शून्यस्य दक्षभागात् अपरिमित-रूपेण वर्धते परन्तु शून्यस्य वाम-पक्षे का अपि संख्या नास्ति ।

पूर्णाङ्कः

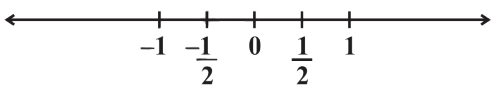
(iii)



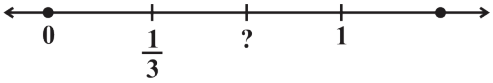
इयं रेखा उभय पक्षतः अपरिमित-रूपेण वर्धते परन्तु इदानीं भवन्तः -1, 0; 0,1 इत्यादीनां मध्ये काञ्चित् संख्यां प्राप्स्यन्ति ।

परिमेय-संख्याः

(iv)



(v)



इयं रेखा उभय पक्षतः अपरिमित-रूपेण वर्धते किं भवन्तः -1, 0; 0, 1 इत्यादीनां मध्ये काञ्चित् संख्यां प्राप्नुवन्ति ?

संख्या-रेखा (iv) इत्यस्मिन्सः बिन्दुः यः 0 तथा 1 इत्यनयोः मध्ये अस्ति सः $\frac{1}{2}$ रूपे अंकितः अस्ति । संख्या-रेखा (v)

इत्यस्मिन् 0 तथा 1 इत्यनयोः मध्ये दूरीं त्रिषु भागेषु आवंटितुं समदूरस्थेषु बिन्दुषु प्रथमं बिन्दुं $\frac{1}{3}$ रूपे अङ्कितुं शक्यते।

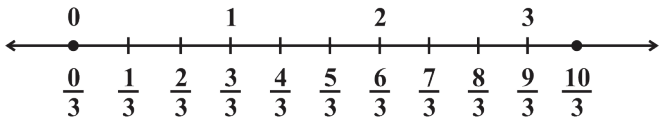
संख्या-रेखा (v) इत्यस्मिन् भाजकबिन्दुतः द्वितीय-बिन्दुं भवन्तः कथं लेखिष्यन्ति ? अंकितमानम् अयं बिन्दुः शून्यस्य

दक्षभागे $\frac{1}{3}$ रूपे अङ्कित-बिन्दुतः द्विगुणिते दूरे अस्ति एवं रीत्या एषः $\frac{2}{3}$ इत्यतः द्विगुणितम् अस्ति, अर्थात् अस्ति।

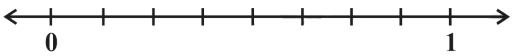
भवन्तः एवमेव संख्या रेखायाः उपरि समदूरस्थं बिन्दुम् अङ्कितुं शक्नुवन्ति। अग्रिमं चिह्नं 1 वर्त्तते। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 1 तथा $\frac{3}{3}$ एकं समानम् अस्ति।

यथा संख्या-रेखा दर्शिता अस्ति $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}$ एतदनन्तरं आगच्छन्ति।

(vi)



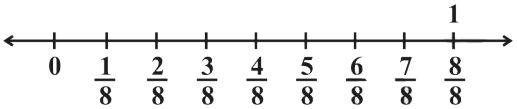
एवमेव $\frac{1}{8}$ इति निरूपितुं संख्या-रेखाखण्डं समानेषु अष्ट-भागेषु बंटितुं शक्यते यथा निम्नाकृतौ दर्शितम् अस्ति।



अस्य विभाजनस्य प्रथम-बिन्दोः नाम दातुं वयं संख्यायाः $\frac{1}{8}$ उपयोगं कुर्मः।

विभाजनस्य द्वितीयं बिन्दुं $\frac{2}{8}$ रूपे अंकितुं भविष्यति, तृतीय-बिन्दुं $\frac{3}{8}$ रूपे तथा एवमेव अग्रेऽपि यथा संख्या-रेखायां (vii) दर्शितम् अस्ति।

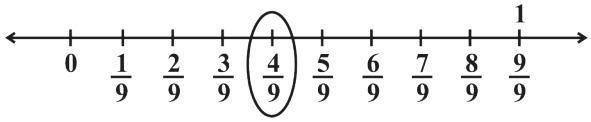
(vii)



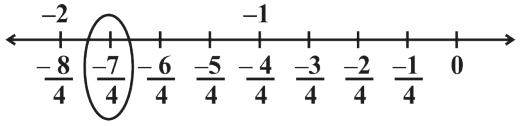
एवमेव संख्या-रेखायां कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः निरूपणं भवितुमर्हति। एकस्यां परिमेय-संख्यायां रेखायाः नीचस्थः संख्याङ्कः अर्थात् हरः, एतत् प्रदर्शयति यत् प्रथमम् एककं कतिषु समान-भागेषु विभाजितवान्। रेखायाः उपरि स्थितः संख्यांकः

अर्थात् अंशः, एतत् प्रदर्शयति यत् एतेषु समान-भागेषु कति भागाः अत्र सम्मिलिताः इत्थं रूपेण परिमेय-संख्यायाः $\frac{4}{9}$ अर्थः यत् शून्यस्य दक्ष-भागे 9 समान-भागेषु चतुर्भागः गृहीतः वर्त्तते (संख्या-रेखा viii) तथा $\frac{-7}{4}$ इत्यस्य कृते वयं शून्यात् आरभ्य वामभागे 7 इति चिह्नं योजयामः यस्मिन् प्रत्येकं दूरी $\frac{1}{4}$ अस्ति। 7 चिह्नं $\frac{-7}{4}$ वर्त्तते। [संख्या-रेखा (ix)]।

(viii)



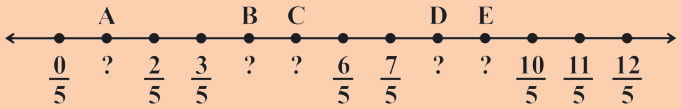
(ix)



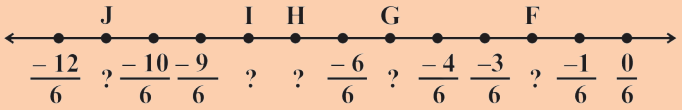
प्रयासं करोतु

अक्षरद्वारा अङ्कितस्य प्रत्येकं बिन्दोः कृते परिमेय-संख्यां लिखतु।

(i)



(ii)



1.4 द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये परिमेय-संख्याः

किं भवन्तः 1 अथ 5 संख्या-मध्ये प्राकृत-संख्यां ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति ? ताः प्राकृत-संख्याः 2, 3 तथा 4 अस्ति। 7 तथा 9 संख्या-मध्ये कति प्राकृत-संख्याः सन्ति ? केवलम् एकं, तथा तत् अस्ति 8,10 तथा 11 संख्या-मध्ये कति प्राकृत-संख्याः सन्ति ? स्पष्टरूपेण एकमपि न। -5 अथ 4 मध्ये स्थितानां पूर्णाङ्कानां सूचीं निर्मापयन्तु। एतत् अस्ति -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, -1, तथा 1 मध्ये कति पूर्णाङ्काः सन्ति ? -9 तथा -10 मध्ये कति पूर्णाङ्काः सन्ति ?

भवन्तः द्वयोः प्राकृत-संख्ययोः (पूर्णाङ्कयोः) मध्ये निश्चितप्राकृत-संख्यां प्राप्स्यन्ति।

$\frac{3}{10}$ तथा मध्ये $\frac{7}{10}$ कति परिमेय-संख्याः सन्ति ? सम्भवतः भवन्तः विचारितुं शक्नुवन्ति यत् एताः संख्याः $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ तथा $\frac{6}{10}$ एवं सन्ति परन्तु भवन्तः $\frac{3}{10}$ इति $\frac{30}{100}$ अथ $\frac{7}{10}$ इति $\frac{70}{100}$ एवं लेखितुं शक्यते।

साम्प्रतं संख्याः $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots \frac{68}{100}, \frac{69}{100}$ एताः $\frac{3}{10}$ सर्वाः $\frac{7}{10}$ तथा इत्येतासां संख्यानां मध्ये सन्ति। एतासां परिमेय-संख्यानां संख्या 39 अस्ति।

एतदतिरिच्य $\frac{3}{10}$ इति $\frac{3000}{10000}$ तथा $\frac{7}{10}$ इति $\frac{7000}{10000}$ इत्थं रीत्या लेखितुं शक्यते। इदानीं वयं

प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्याः $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$, एताः सर्वाः संख्याः $\frac{3}{10}$ तथा $\frac{7}{10}$ एतयोः मध्ये सन्ति। एताः आहत्य 3999 संख्याः सन्ति।

एवं प्रकारेण वयं $\frac{3}{10}$ तथा $\frac{7}{10}$ एतयोः मध्ये अधिकाधिक-संख्यानां समावेशं कर्तुं शक्नुमः । अत एव प्राकृत-संख्यानां पूर्णाङ्कानाञ्च सदृशं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये प्राप्यमाणाः परिमेय-संख्याः न सन्ति । कस्मिन् अन्यस्मिन् उदाहरणे वयं विचारं कुर्मः । $\frac{-1}{10}$ तथा $\frac{3}{10}$ एतयोः मध्ये कति परिमेय-संख्याः सन्ति ? स्पष्टतया दीयमानासु संख्यासु मध्ये $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ परिमेय-संख्याः सन्ति ।

यदि वयं $\frac{-1}{10}$ इति $\frac{-10000}{100000}$ तथा $\frac{3}{10}$ इति $\frac{30000}{100000}$ रूपे लिखामः तर्हि वयं $\frac{-1}{10}$ तथा $\frac{3}{10}$ मध्ये $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, \cdots \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$, संख्यां प्राप्नुमः । भवन्तः कयोश्चित् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-परिमेय-संख्यां प्राप्स्यन्ति ।

उदाहरणम् 6 -2 तथा 0 इत्यनयोः मध्ये 3 परिमेय-संख्यां जानातु ।

समाधानम् -2 इति $\frac{-20}{10}$ तथा 0 इति $\frac{0}{10}$ रूपे लेखितुं शक्यते । अतः वयं -2 तथा 10 इत्यनयोः मध्ये $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, \ldots, \frac{-1}{10}$ परिमेय-संख्यां प्राप्नुमः । भवन्तः एषु कमपि संख्या-त्रयं नेतुं शक्नुवन्ति ।

उदाहरणम् 7 $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{5}{8}$ इत्यनयोः मध्ये 10 परिमेय-संख्यां जानातु ।

समाधानम् सर्वप्रथमं वयं $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{5}{8}$ इति संख्यां समान-परिमेय-संख्यारूपे परिवर्त्तयतु ।

$$\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24} \text{ तथा } \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

एवमेव वयं $\frac{-20}{24}$ तथा $\frac{15}{24}$ इत्यनयोः मध्ये निम्नलिखित-परिमेय-संख्यां प्राप्नुमः । भवन्तः एषु कामपि दस-संख्यां नेतुं शक्नुवन्ति $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots, \frac{14}{24}$

अन्यः विधिः

आगच्छतु 1 तथा 2 इत्यनयोः मध्ये परिमेय-संख्यां जानीमः । तासु एका संख्या 1.5 अथवा $1\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{2}$ अस्ति । एषः 1 तथा 2 इति संख्यायाः माध्यः वर्त्तते । भवन्तः कक्षा vii मध्ये माध्यविषये पठितवन्तः । एवंरीत्या वयं प्राप्नुमः यत् दीयमानासु संख्यासु मध्ये पूर्णाङ्कं प्राप्तुं न आवश्यकम् अस्ति परन्तु दीयमानासु संख्यासु मध्ये एका परिमेय-संख्या सर्वदा तिष्ठति । वयं दीयमानासु परिमेय-संख्यासु मध्ये परिमेय-संख्यां ज्ञातुं माध्यस्य अवधारणायाः प्रयोगं कुर्मः ।

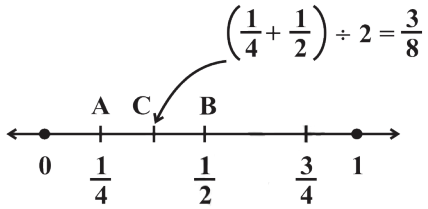
उदाहरणम् 8 $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये एकां परिमेय-संख्यां जानातु।

समाधानम् वयं प्रोक्त-परिमेय-संख्यायाः माध्यं जानीमः।

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\left(\frac{1+2}{4}\right)\div 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ मध्ये $\frac{3}{8}$ स्थिता अस्ति।

एतत् संख्या रेखा मध्ये अपि द्रष्टुं शक्यते।



वयं AB इत्यस्य मध्य-बिन्दुं C इति प्राप्नुमः। यः $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{3}{8}$ रूपे निरूपितः अस्ति।

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ अस्ति।

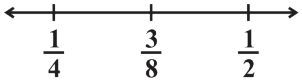
यदि a तथा b केचित् द्वे संख्ये स्तः तर्हि a तथा b इत्यनयोः मध्ये $\frac{a+b}{2}$ एका परिमेय-संख्या इत्थम् अस्ति

यत् $a<\frac{a+b}{2}<b$

एतेन एतदपि ज्ञायते यत् प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-परिमेय-संख्याः भवन्ति।

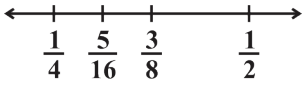
उदाहरणम् 9 $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये परिमेय-संख्या-त्रयं जानातु।

समाधानम् वयं प्रोक्त-संख्यायाः माध्यं जानीमः। यथा उपर्युक्तोदाहरणेषु प्रदत्तम् अस्ति एतासां संख्यानां माध्यः $\frac{3}{8}$ अस्ति तथा $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ अस्ति।



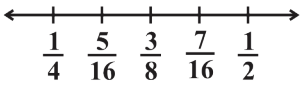
साम्प्रतं $\frac{1}{4}$ इत्यनयोः $\frac{3}{8}$ मध्ये एकां परिमेय-संख्यां जानीमः एतदर्थं वयं पुनः $\frac{1}{4}$ इत्यनयोः $\frac{3}{8}$ माध्यं जानीमः। अर्थात् $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\div 2=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$ अस्ति।

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$$



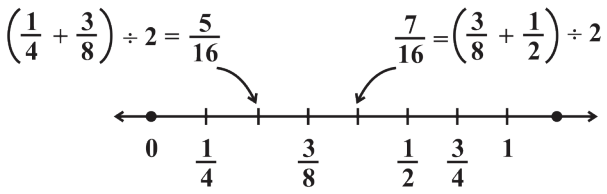
साम्प्रतं $\frac{3}{8}$ इत्यनयोः $\frac{1}{2}$ माध्यं जानातु। $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$ वयं प्राप्नुमः।

एवमेव वयं $\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$ प्राप्नुमः



$\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेय-संख्याः $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$ सन्ति।

एतत् स्पष्टतया संख्यारेखायां निम्नरूपेण द्रष्टुं शक्यते।



एवमेव वयं प्रोक्ताषु परिमेय-संख्यासु मध्ये स्व इच्छानुसारेण यावतीं परिमेय-संख्याम् इच्छामि तावतीं ज्ञातुं शक्नुमः। भवन्तः दृष्टवन्तः यत् प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-संख्याः भवन्ति।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित-संख्यां संख्यारेखायां निरूपयन्तु - (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. $\frac{-2}{11}$, $\frac{-5}{11}$, $\frac{-9}{11}$ इति संख्यारेखायां निरूपयन्तु ।

3. एतादृशीं पञ्च परिमेय-संख्यां लिखन्तु या 2 इत्यतः लघु भवेत्।

4. $\frac{-2}{5}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये दसपरिमेय-संख्यां निरूपयन्तु।

5. (i) $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ तथा $\frac{5}{3}$

(iii) $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये पञ्च परिमेय-संख्यां निरूपयन्तु।

6. -2 संख्यायाः दीर्घां पञ्च परिमेय-संख्यां लिखन्तु।

7. $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{3}{4}$ इत्यनयोः मध्ये दसपरिमेय-संख्यां निरूपयन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. परिमेय-संख्याः योगान्तर्गते, व्यकलनान्तर्गते, गुणाकारान्तर्गते चसंवृताःसन्ति।
2. परिमेय-संख्यानां कृते योगस्य, गुणाकारस्य च संक्रियाः
   (i) **क्रमविनिमेयाः** सन्ति।
   (ii) **साहचर्याः** सन्ति।
3. परिमेय-संख्यानां कृते परिमेय-संख्या शून्यं **योज्यः तत्समकः** अस्ति।
4. परिमेय-संख्यानां कृते परिमेय-संख्या 1 **गुणात्मकः तत्समकः** अस्ति।
5. परिमेय-संख्या $\frac{a}{b}$ इत्यस्य **योज्य-प्रतिलोमः** - $\frac{a}{b}$ अस्ति तथा विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति।
6. यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = 1$ संख्या $\frac{a}{b}$ अस्ति तर्हि परिमेय-संख्यायाः संख्या इत्यस्य व्युत्क्रमः अथवा **गुणात्मक-प्रतिलोमः** $\frac{c}{b}$ अस्ति।
7. परिमेय-संख्यानां **वितरकता** परिमेय-संख्याः a, b तथा c इत्यस्य कृते $a(b + c) = ab + ac$ तथा $a(b - c) = ab-ac$ अस्ति।
8. परिमेय-संख्यां संख्यारेखायां निरूपयितुम् अर्हति।
9. प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-संख्याः भवन्ति। प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये परिमेय-संख्यां ज्ञातुं माध्यस्य अवधारणा सहायिका भवति।

नोट

एकचरणान्वितं रैखिक-समीकरणम्

अध्यायः 2

2.1 भूमिका

पूर्वतनकक्ष्यायां, भवन्तः अनेकबीजीय-व्यञ्जकविषये अथ समीकरणविषये ज्ञातवन्तः। एतादृशं व्यञ्जकं यत् वयं दृष्टवन्तः, तस्य कानिचन उदाहरणानि सन्ति

$$5x,\ 2x\ -3,\ 3x + y,\ 2\ xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

समीकरणानां कानिचन उदाहरणानि - $5x=25,\ 2x-3 =9,\ 2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2},\ 6z+10=-2$

भवन्तः स्मरन्ति खलु यत् समीकरणेषु सदैव समता ' = 'एतादृशस्य चिह्नस्य प्रयोगो भवति यत् व्यञ्जकेषु न भवति।

एतेषु व्यञ्जकेषु केषुचित् एकाधिकाः चरप्रयोगाः अभवन्। उदाहरणार्थं - $2\ xy + 5$ इत्यस्मिन् चरद्वयं वर्त्तते तथापि वयं साम्प्रतं समीकरण-निर्माणे केवलम् एकचरीय-व्यञ्जकस्यैव प्रयोगं करिष्यामः तथा ते व्यञ्जकाः समीकरण-निर्माणे लिखिताः रैखिकाश्च भविष्यन्ति। एतत् तात्पर्यम् एतदेव यत् व्यञ्जकेषु प्रयोगतव्यानां चराणां अधिकतमः घातः एकः एव भविष्यति।

केचन रैखिक-व्यञ्जकाः सन्ति -

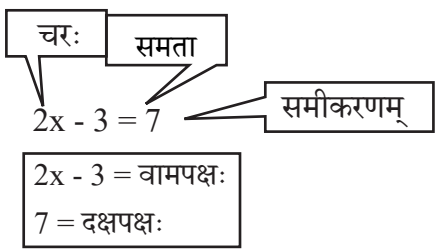
$$2x,\ 2x+1,\ 3y-7,\ 12-5z,\ \frac{5}{4}\ (x-4)+10$$

एते रैखिक-व्यञ्जकाः न सन्ति $-x^2 + 1, y + y^2, 1 + z + z^2 + z^3$

(ध्यानं ददतु यत् चरस्य अधिकतमः घातः 1 इत्यतः अधिकः अस्ति)

साम्प्रतं वयं समीकरणेषु एकचरीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्मः। एतादृशानि समीकरणानि एकचरीय-रैखिक-समीकरणानि कथ्यन्ते। पूर्वतनकक्ष्यासु यादृशानि सरलानि समीकरणानि भवद्भिः समाधितानि तानि एतादृशानि एव आसन्। आगच्छन्तु यत् वयं जानीमः तत् संक्षिप्तेन पुनरावलोकनं कुर्मः-

(a) एकबीजीय-समीकरणे चराणां प्रयोग-समये एका समता भवति। अस्मिन् एकं समतायाः चिह्नं भवति। अस्याः समतायाः वामभागीय-व्यञ्जकः वामपक्षः तथा दक्षभागीय-व्यञ्जकः दक्षभागः कथ्यते।



(b) एकस्मिन्-समीकरणे वामपक्षे व्यञ्जकस्य मानं दक्षपक्षे व्यञ्जकमानस्य समानमेव भवति । इत्थं चराणां केषाञ्चित् मानानां कृते एव सम्भवं भवति तथा चराणां एतादृश-मानानाम् एव चराणां समाधानं कथ्यते ।

$2x - 3 = 7$ अस्य समीकरणस्य समधानं वर्त्तते - $x = 5$ यतो हि $x = 5$ एवं सति वामपक्षस्य मानंभविष्यति $2\times5-3=7$ एतत् दक्षपक्षस्य मानम् अस्ति परन्तु
$x = 10$ अस्य समाधानं नास्ति, यतो हि $x = 10$ इति सति वामपक्षस्य मानं भविष्यति $2\times10-3=17$ एतत् दक्षपक्षस्य समानं नास्ति ।

(c) कस्यापि समीकरणस्य समाधानं कथं ज्ञातव्यम् ? वयं मन्यामहे यत् समीकरणस्य उभयः पक्षः तुलायाः उभयः पक्षः इव संतुलने अस्ति । अतः वयं उभयस्मिन् पक्षे साम्यां गणितीय-सङ्क्रियां कुर्मः यस्मात् समीकरणस्य संतुलनं सम्यक् स्यात्, असमीचीनं न भवेत् परन्तु समीकरणं सरलं सरलतरञ्च स्यात् । एवमेव केषाञ्चित् चरणानाम् अनन्तरं समीकरणस्य समाधानं प्राप्नुमः ।

2.2 समीकरण-साधनं, यस्य एकस्मिन् पक्षे रैखिक-व्यञ्जकः अथ अपरस्मिन् पक्षे केवलं संख्या स्यात्

किञ्चित् उदाहरणं गृहीत्वा समीकरणानां समाधान-विधिं पुनः ध्याने आनयामः । समाधानेषु ध्यानं ददतु । समाधानरूपे काचित् परिमेय-संख्यां प्राप्तुं शक्नुवन्ति ।

उदाहरणम् 1 समाधानं जानातु $2x - 3 = 7$

समाधानम्

चरणम् 1 उभयोः पक्षयोः 3 संख्यां योगे सति -

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$

$$2x = 10 \qquad \text{(असंतोलनं न जातम्)}$$

अथवा

चरणम् 2 उभयोः पक्षयोः 2 इत्यतः भागाकारे सति

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

अथवा $x=5$ (अपेक्षितं समाधानम्)

उदाहरणम् 2 समाधानं जानातु $2y + 9 = 4$

समाधानम् 9 इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति

$$2y = 4 - 9$$

अथवा

$$2y = -5$$

उभयोः पक्षयोः 2 इत्यतः भागाकारे सति $y = \frac{-5}{2}$ (समाधानम्)

समाधानस्य परीक्षणम् -

वामपक्षः $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5+9 = 4 =$ दक्षपक्षः (यथा इच्छति)

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् $\frac{-5}{2}$ एका परिमेय-संख्या अस्ति। सप्तम-कक्ष्यायां यत् समीकरणं समाधितवन्तः तस्य समाधानम् ईदृशं संख्यात्मकं नासीत्।

उदाहरणम् 3 समाधानं जानातु $\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

समाधानम् $\frac{5}{2}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति $\frac{x}{3} = \frac{-5}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2}$

अथवा $\frac{x}{3} = -4$

उभयोः पक्षयोः 3 इत्यतः गुणाकारे सति $x = -4 \times 3$

अथवा $x = -12$ (समाधानम्)

परीक्षणम् -

वामपक्षः $= -\frac{12}{3} + \frac{5}{2} = -4 + \frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ दक्षपक्षः (यथा इच्छति)

ध्यानं ददतु समीकरणे चरस्य गुणाङ्कः आवश्यकः नास्ति यत् सदैव एकः पूर्णाङ्कः एव स्यात्।

उदाहरणम् 4 समाधानं कुर्वन्तु $\frac{15}{4} - 7x = 9$

समाधानम् ज्ञातमस्ति - $\frac{15}{4} - 7x = 9$

अथवा $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति)

अथवा $-7x = \frac{21}{4}$

अथवा $x = \frac{21}{4 \times (-7)}$ (उभयोः पक्षयोः -7 इत्यतः भागाकारे सति)

अथवा $x = -\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$

अथवा $x = -\frac{3}{4}$ (अपेक्षितं समाधानम्)

परीक्षणम् -वामपक्षः $\frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9$ दक्षपक्षः (यथा इच्छति)

प्रश्नावली 2.1

निम्नसमीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु -

1. $x-2 = 7$ **2.** $y+3 = 10$ **3.** $6 = z+2$

4. $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$ **5.** $6x = 12$ **6.** $\frac{t}{5} = 10$

7. $\frac{2x}{3}=18$ **8.** $1.6=\frac{y}{1.5}$ **9.** $7x-9=16$

10. $14y-8=13$ **11.** $17+6p=9$ **12.** $\frac{x}{3}+1=\frac{7}{15}$

2.3 कश्चित् अनुप्रयोगः

वयम् एकेन सरलेन उदाहरणेन आरम्भं कुर्मः ।

द्वयोः संख्ययोः योगः 74 अस्ति । तेषु एका संख्या द्वितीयतः 10 अधिका अस्ति । ताः संख्याः काः सन्ति ? एतत् एका प्रहेलिका इव अस्ति । वयम् उभयोः कामपि संख्यां न जानीमः तथा तां ज्ञातुम् इच्छामः । वयं नियमद्वयं प्राप्तवन्तः -

(i) एका संख्या द्वितीयतः 10 अधिका अस्ति तथा

(ii) तस्याः योगः 74 अस्ति । वयं अष्टम कक्ष्यायां शिक्षितवन्तः यत् एतादृशीं समस्यां कथम् आरम्भं करिष्यामः । वयम् एवं स्वीकुर्मः यत् लघु संख्या x अस्ति तदा बृहत् संख्या x इत्यतः 10 अधिका अर्थात् x+10 ।

द्वितीयः नियमः अस्ति यत् संख्यानां योगः 74 अस्ति ।

अतः	$x+(x+10)=74$
अथवा	$2x+10=74$
10 संख्यां दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति	$2x=74-10$
अथवा	$2x=64$
उभयोः पक्षयोः 2 इत्यतः भागाकारे सति	$x=32$

अर्थात् लघु संख्या वर्त्तते 32 तथा द्वितीया बृहत् संख्या वर्त्तते $x+10=32+10=42$

अर्थात् अपेक्षिताः संख्याः 32 तथा 42 वर्त्तन्ते या उभयं नियमम् अपि पूरयति अस्य विधेः उपयोगितां प्रदर्शनार्थं वयं केषुचित् उदाहरणेषु विचारं कुर्मः ।

उदाहरणम् 5 परिमेय-संख्या $\frac{-7}{3}$ इति संख्यायाः द्विगुणिते वयं किं योजयामः यस्मात् योगः $\frac{3}{7}$ इति प्राप्नुमः ?

समाधानम् परिमेय-संख्या $\frac{-7}{3}$ इति संख्यायाः द्विगुणितम् अस्ति $2\times\left(\frac{-7}{3}\right)=\frac{-14}{3}$

स्वीकुर्मः यत् x योजने सति $\frac{3}{7}$ इति प्राप्नुमः । अतः $x+\left(\frac{-14}{3}\right)=\frac{3}{7}$

अथवा $x-\frac{14}{3}=\frac{3}{7}$

अथवा $x=\frac{3}{7}+\frac{14}{3}$ ($\frac{-14}{3}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति)

$=\frac{(3\times3)+(14\times7)}{21}=\frac{9+98}{21}=\frac{107}{21}$

एवमेव $\frac{3}{7}$ प्राप्तं कर्तुं $2\times\left(\frac{-7}{3}\right)$ इत्यस्यां $\frac{107}{21}$ योक्तुं भवेत् ।

उदाहरणम् 6 एकस्य आयतस्यपरिमापनं 13 cm अस्ति तथा तस्य वैशाल्यं $2\frac{3}{4}$ अस्ति। तस्य लम्बं जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् आयतस्य लम्बं x cm अस्ति।

आयतस्य परिमापनं 2 × (लम्बं + वैशाल्यं)

$$=2\times\left(x+2\frac{3}{4}\right)=2\times\left(x+\frac{11}{4}\right)$$

परिमापनं 13 cm इति प्रदत्तम् अस्ति।

अतः $$2\left(x+\frac{11}{4}\right)=13$$

अथवा $$x+\frac{11}{4}=\frac{13}{2}$$

उभयोः पक्षयोः 2 इत्यतः भागाकारे सति

अथवा $x=\frac{13}{2}-\frac{11}{4}$ ($\frac{11}{4}$ इत्यस्य दक्षपक्षे पक्षान्तरणे सति)

$$=\frac{26}{4}-\frac{11}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

आयतस्य लम्बं $3\frac{3}{4}$ cm अस्ति।

उदाहरणम् 7 साहिलस्य मातुः वर्त्तमान-आयुः साहिलस्य वर्त्तमान-आयुतः त्रिगुणः अस्ति। 5 वर्षानन्तरं द्वयोः आयुः 66 वर्षः इति भविष्यति। तयोः वर्त्तमान-आयुं जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् साहिलस्य वर्त्तमान-आयुः xअस्ति।

वयं साहिलस्य 5 वर्षानन्तरं x इति स्वीकृत्य अपि चलितुं शक्नुमः। भवन्तः एवमेव चलित्वा प्रयत्नं कुर्वन्तु।

	साहिलः	अम्बा	योगः
वर्त्तमान - आयुः	x	3x	
5 वर्षानन्तरम् आयुः	x+5	3x+5	4x+10

तयोः आयुषः योगः 66 वर्षाणि प्रदत्तः अस्ति।

अतः $$4x+10=66$$

अस्मिन् समीकरणे x साहिलस्य वर्त्तमान-आयुः वर्त्तते। समीकरणं समाधातुं 10 दक्षपक्षे पक्षान्तरणं कुर्मः।

$$4x=66-10$$

अथवा $$4x=56$$

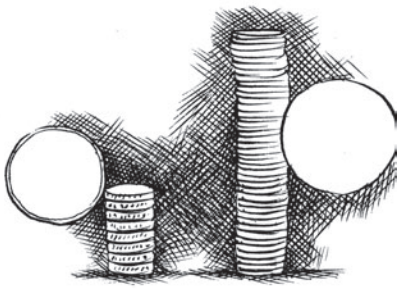
अथवा $x=\frac{56}{4}=14$ (समाधानम्)

एवं प्रकारेण साहिलस्य वर्त्तमान-आयुः 14 वर्षः अस्ति तथा तस्य मातुः 42 वर्षः अस्ति । भवन्तः परीक्षणं कर्त्तुं शक्नुवन्ति यत् 5 वर्षानन्तरं तयोः आयुः 66 वर्षः भविष्यति ।

उदाहरणम् 8 बंशीमहोदयस्य पार्श्वे कानिचन पणकानि रु. 2 संख्यात्मकानि सन्ति अथ कानिचन रु. 5 संख्यात्मकानि सन्ति यदि रु. 2 संख्यात्मकानां पणकानां संख्या रु. 5 संख्यात्मक-पणकातः त्रिगुणा वर्त्तते तथा तस्य मूल्यस्य सम्पूर्ण-योगः रु. 77 अस्ति तर्हि उभयोः प्रकारकयोः पणकयोः संख्यां जानन्तु ।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् बंशीमहोदयस्य पार्श्वे रु. 5 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या xअस्ति ।

तर्हि रु. 2 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या = 3x



अतः (i) रु. 5 संख्यात्मकस्य x पणकस्य मूल्यं = 5 × x = ₹

तथा (ii) रु. 2 संख्यात्मकस्य 3x पणकस्य मूल्यं = 2×3x =

अतः सम्पूर्ण-मूल्यं = 5x+6x=रु.11x

सम्पूर्णं मूल्यं प्रदत्तम् अस्ति रु.77

अतः 11x = 77

अथवा $x = \frac{77}{11} = 7$ (उभौ पक्षौ 11 तः भागाकारे सति)

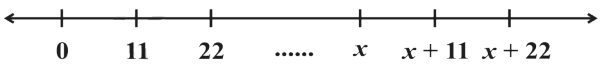
अर्थात् रु. 5 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या x=7

तथा रु. 2 संख्यात्मकस्य पणकस्य संख्या = 3x=21

भवन्तः परीक्षितुं शक्नुवन्ति यत् एतयोः द्वयोः मूल्यं रु.77 एव भवति ।

उदाहरणम् 9 यदि 11 संख्यात्मकस्य सततं त्रयस्य गुणजस्य योगः 363 अस्ति तर्हि तत् जानन्तु ।

समाधानम् यदि 11 संख्यात्मकस्य गुणजः x अस्ति तदा अग्रिमः गुणजः भविष्यति x+11 ततः तस्य अग्रिमः गुणजः भविष्यति x+11+11 अथवा x+22 ।



प्रदत्तम् अस्ति यत् 11 संख्यात्मकस्य सततं त्रयस्य गुणजस्य योगः 363 अस्ति ।

एतेन वयं निम्न-समीकरणं प्राप्नुमः -

x+(x+11) + (x+22) = 363

अथवा x+x+11+x+22 = 363

अथवा 3x+33 = 363

अथवा 3x = 363-33

अथवा 3x = 330

अथवा $x = \frac{330}{3} = 110$

अर्थात् एते त्रयः गुणजाः 110, 121 तथा 132 सन्ति ।

वयम् अत्र पश्यामः यत् समस्या विभिन्न-प्रकारेण कथं समाधानीया ।

वैकल्पिक-समाधानम् - 11 संख्यात्मकस्य त्रिषु सातत्य-गुणजेषु मध्यः गुणजः x स्वीकुर्मः । एतत् पूर्वतनः गुणजः भवेत् x-11 तथा एतदनन्तरं गुणजः भविष्यति x+11 अतः समीकरणं भविष्यति - (x-11)+ x+(x+11)=363

अथवा 3x=363 उभौ पक्षौ 3 तः भागाकारे सति

$x = \frac{363}{3} = 121$

एवं रीत्या x=121, x-11=110, x+11=132

अतः 11 संख्यात्मकस्य त्रयः गुणजाः 110, 121 तथा 132 इति ।

उदाहरणम् 10 द्वयोः पूर्ण-संख्ययोः अन्तरं 66 अस्ति यदि तयोः 2 : 5 इत्यस्य अनुपातः अस्ति तां संख्यां जानन्तु।

समाधानम् यतो हि उभे संख्ये 2 : 5 इत्यस्य अनुपाते स्तः, अतः वयम् एकां संख्यां 2x तथा अपरां 5x स्वीकुर्मः।

(ध्यानं ददतु 2x : 5x इत्यस्मिन् 2 : 5 इत्यस्य अनुपातः अस्ति।)

एतस्मिन् अंतरम् अस्ति 5x-2x यत् 66 इत्यस्य समानम् अस्ति।

अतः $5x-2x= 66$

अथवा $3x= 66$

अथवा $x= 22$

यतो हि संख्या 2x तथा 5x अस्ति। अतः संख्याः अभवन् 2×22 तथा 5×22 अर्थात् 44 तथा 110 एवम् अस्य अन्तरं 110 - 44 = 66 एव अस्ति यत् वाञ्छितं वर्त्तते।

उदाहरणम् 11 देवेश्याः पार्श्वेरु.50, रु.20 तथा रु.10 संख्यकानां सर्वम् आहत्य 25 मुद्रणानि सन्ति येषां मूल्यं रु. 590 भवति। यदि रु. 50 तथा रु.20 संख्यायाम् अनुपातः 3 : 5 अस्ति तर्हि प्रत्येक-प्रकारकाणां मुद्रणानां संख्यां जानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् रु.50 तथा रु.20 संख्यात्मकस्य मुद्रणस्य संख्या क्रमशः 3x तथा 5xअस्ति।

परन्तु समस्त मुद्रणानां संख्या 25 अस्ति।

अतः रु.10 संख्यात्मकस्य मुद्रणस्य संख्या =25-(3x+5x)=25-8x

एतादृशात् मुद्रणकारणात् तस्य पार्श्वे धनमभवत्

रु. 50 संख्यात्मक-मुद्रणात् 3x×50=रु.150x

रु. 20 संख्यात्मक-मुद्रणे 5x×20=रु.100x

रु. 10 संख्यात्मक-मुद्रणे (25-8x)×10=रु.(250-80x)

तथा सर्वम् आहत्य धनम् अभवत् =150x+100x+(250-80x)

= रु. (170x+250)

एतत् धनं रु. 590 इत्यस्य समानं जातम्। अतः 170x+250=590

अथवा $170x=590-250=340$

अथवा $x= \frac{340}{170} = 2$

अर्थात् देवेश्याः पार्श्वे रु.50 संख्यात्मकं मुद्रणम् =3x

= 3×2=6 मुद्रणम्

रु. 20 संख्यात्मक-मुद्रणम् = 5x=5×2=10 मुद्रणम्

तथा रु. 10 संख्यात्मक-मुद्रणम् = 25-8x

= 25-(8×2)=25-16=9

प्रश्नावली 2.2

1. यदि भवन्तः कस्याः अपि संख्यायाः $\frac{1}{2}$ व्यवकलने सति परिणामं $\frac{1}{2}$ इत्यनेन सह गुणाकारे सति $\frac{1}{8}$ प्राप्नुवन्ति तर्हि सा संख्या का भविष्यति ?

2. एकस्य आयताकारस्य तरण-तालस्य औन्नत्यं तस्य वैशाल्यस्य द्विगुणितात् 2 मीटर इति अधिकम् अस्ति। यदि अस्य परिमापनं 154 मीटर पर्यन्तम् अस्ति तर्हि अस्य औन्नत्यं वैशाल्यञ्च जानन्तु।

3. एकस्य समद्विबाहु-त्रिभुजस्य आधारः $\frac{4}{3}$cm अस्ति तथा तस्य परिमापनं $4\frac{2}{15}$cm अस्ति। तस्य समानयोः द्वयोः भुजयोः मापनं जानन्तु।

4. द्वयोः संख्ययोः योगः 95 अस्ति। यदि एका संख्या अपरसंख्यातः 15 अधिका अस्ति तर्हि संख्याद्वयं जानन्तु।

5. द्वयोः संख्ययोः अनुपातः 5: 3 अस्ति। यदि तयोः अन्तरं 18 अस्ति तर्हि संख्यां जानन्तु।

6. त्रयाणां सतत-पूर्णाङ्कानां योगः 51 अस्ति। पूर्णाङ्कं जानन्तु।

7. 8 इत्यस्य सतत-गुणजानां योगः 888 अस्ति। गुणजं जानन्तु।

8. त्रयं सतत-पूर्णाङ्क-वर्धनक्रमे तान् क्रमशः 2, 3 तथा 4 तः गुणाकारं कृत्वा योगे सति योगफलं 74 प्राप्नुमः। त्रीन् पूर्णाङ्कान् जानन्तु।

9. राहुलस्य हारुनस्य च आयौ अनुपातः 5:7 अस्ति । 4 वर्षानन्तरं तयोः आयोः योगः 54 वर्षः भविष्यति। तयोः वर्त्तमान-आयुः कः ?

10. कस्यामपि कक्ष्यायां बालकानां बालिकानाञ्च संख्यासु अनुपातः 7:5 अस्ति। यदि बालकानां संख्या बालिकानां संख्यातः 8 इत्यतः अधिका अस्ति तर्हि कक्ष्यायाम् आहत्य कति विद्यार्थिनः सन्ति ?

11. बाइचुंगस्य पिता तस्य पितामहात् 26 वर्षाणि लघुः वर्त्तते। तस्मात् 29 वर्षाणि गुरुः वर्त्तते। यदि तेषां त्रयाणाम् आयोः योगः 135 वर्षाणि सन्ति तर्हि तेषाम् आयुं पृथक्-पृथक् जानन्तु।

12. 15 वर्षानन्तरं रवेः आयुः तस्य वर्त्तमान-आयुतः चतुर्गुणः भविष्यति। रवेः आयुः?

13. एकां परिमेय-संख्यां $\frac{5}{2}$ इत्यतः गुणाकारं कृत्वा $\frac{2}{3}$ योगे सति -$\frac{7}{12}$ प्राप्तिः भवति। सा संख्या का ?

14. लक्ष्मीः एकस्मिन् वित्तकोषे कोषाध्यक्षा अस्ति। तस्याः पार्श्वे नकद-रूपेण रु.100, रु.50 तथा रु.10 संख्यात्मकानि रुप्यकाणि सन्ति। तेषु संख्यासु क्रमशः 2: 3 : 5 अनुपातः अस्ति तथा तस्य मूल्यं रु.4,00,000 अस्ति। तस्याः पार्श्वे प्रत्येक-प्रकारकं कति मुद्रणम् अस्ति ?

15. मम पार्श्वे रु.300 मूल्यस्य रु.1, रु.2 तथा रु.5 संख्यात्मकं पणकम् अस्ति। रु.2 संख्यात्मकानां पणकानां संख्या रु.5 संख्यात्मकस्य पणकस्य त्रिगुणा वर्त्तते तथा पणकानां संख्या 160 अस्ति। मम पार्श्वे प्रत्येक-प्रकारकाणि कति पणकानि सन्ति ?

16. एकस्यां निबन्ध-प्रतियोगितायाम् आयोजकाः निश्चितवन्तः यत् प्रत्येक-विजेतृभ्यः रु.100 तथा विजेतारं परित्यज्य प्रत्येक-प्रतिभागिने रु.25 इति पुरस्कार-रूपेण दास्यन्ति। यदि पुरस्कार-रूपेण आवंटितः राशिःरु.3,000 आसीत् तर्हि आहत्य 63 प्रतिभागिषु कति विजेतारः भविष्यन्ति ?

2.4 समीकरण-समाधानं यदा उभयोः पक्षयोः चरः उपस्थितः स्यात्।

एकस्मिन् समीकरणे, उभयोः बीजीय-व्यञ्जकयोः माने समता भवति। समीकरणं $2x-3=7$ इत्यस्मिन् एकः व्यञ्जकः अस्ति $2x-3$ तथा द्वितीयः 7 अस्ति। इदानीं यावत् प्रायः सर्वेषु उदाहरणेषु दक्षपक्षे एका एव संख्या आसीत् परन्तु एवं सर्वदा भवेत् इति आवश्यकं नास्ति। चरराशिः उभयोः पक्षयोः भवितुम् अर्हति। उदाहरणार्थम् $2x-3=x+2$ इति समीकरणे उभयोः पक्षयोः चरीय व्यञ्जकः अस्ति $(2x-3)$ तथा दक्षपक्षे $(x+2)$ अस्ति।

- साम्प्रतं वयम् एतादृशं समीकरणं समाधातुं चर्चयामः यस्य उभयोः पक्षयोः चरीय व्यञ्जकाः स्युः।

उदाहरणम् 12 समाधानं कुर्वन्तु $2x-3=x+2$

समाधानम् प्रदत्तम् अस्ति - $2x=x+2+3$

अथवा $2x=x+5$

अथवा $2x-x=x+5-x$ (उभय-पक्षात् x व्यवकलने सति)

अथवा $x=5$ (समाधानम्)

अत्र वयं समीकरणस्य उभय पक्षात् एकां संख्याम् उत स्थिराङ्कम् एव न अपितु चरीय-पदम् एव व्यवकलितवन्तः। वयम् एवं कर्तुं शक्नुमः यतो हि चरस्य मानं कापि संख्या एव भवति। ध्यानं ददतु यत् x इति उभय पक्षात् व्यवकलनेन तात्पर्यम् अस्ति यत् x इत्यस्य वामपक्षे पक्षान्तरणम्।

उदाहरणम् 13 समाधानं कुर्वन्तु $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} x-14$

समाधानम् उभौ पक्षौ 2 इत्यतः गुणाकारे सति वयं प्राप्नुमः -

$$2x\times(5x+\frac{7}{2}) = 2 \times\left(\frac{3}{2} x-14\right)$$

अथवा $(2\times5x)+\left(2\times\frac{7}{2}\right)=\left(2 \times\frac{3}{2} x\right)- (2 \times14)$

अथवा $10x+7=3x-28$

अथवा $10x-3x+7=-28$ ($3x$इति वामपक्षे पक्षान्तरणे सति)

अथवा $7x+7=-28$

अथवा $7x=-28-7$

अथवा $7x=-35$

अथवा $x= \frac{-35}{7}$

अथवा $x=-5$ (समाधानम्)

प्रश्नावली 2.3

निम्न-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु अथ स्व-उत्तरस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

1. $3x=2x+18$ **2.** $5t-3=3t-5$ **3.** $5x+9=5+3x$

4. $4z+3=6+2z$ 5. $2x-1=14-x$ 6. $8x+4=3(x-1)+7$

7. $x = \frac{4}{5}(x+10)$ 8. $\frac{2x}{3}+1=\frac{7x}{15}+3$ 9. $2y+\frac{5}{3}=\frac{26}{3}-y$

10. $3m=5m-\frac{8}{5}$

2.5 कानिचन अन्यानि उदाहरणानि

उदाहरणम् 14 अङ्कद्वयात्मिकायाः एकसंख्यायाः उभयोः अङ्कयोः 3 इत्यस्य अन्तरं वर्त्तते । अस्यां संख्यायाम् अस्य अङ्कान् परिवर्त्य प्राप्त-संख्यां योजने सति 143 इति प्राप्तिः भवति ।

समाधानम् उदाहरणार्थम् अङ्कद्वयात्मिका काचित् एका संख्या यथा 56 गृह्णामः । एतत् एवं रीत्या अपि लेखितुं शक्यते $-56=(10\times5)+6$

अस्याः संख्यायाः अङ्कं परिवर्त्तने सति संख्या प्राप्ता भवति 65 इति एतत् एवमपि लेखितुं शक्यते $65=(10\times6)+5$

वयं अङ्कद्वयात्मिकायां संख्यायाम् एककस्य अङ्कः b इति स्वीकुर्मःयतोहि उभयोः अङ्कयोः अन्तरं 3 अस्ति । अतः दशकस्य अङ्कः $=b+3$

यदि एककस्य अङ्कः b इति अस्ति तर्हि किं वयं दशकस्य अङ्कः (b-3) इति ग्रहीतुं शक्नुमः ? गृहीत्वा पश्यन्तु किमुत्तरंलभ्यते ।

अर्थात् अङ्कद्वयात्मिका संख्या -

$=10(b+3)+b=10b+30+b=11b+30$

अङ्कं परिवर्त्तने सति संख्याभविष्यति $10b+(b+3)=11b+3$

एतयोः द्वयोः संख्ययोः योजने सति प्राप्तिः भवति - 143 इति ।

अतः $(11b+30)+(11b+3)=143$

अथवा $11b+11b+30+3=143$

अथवा $22b+33=143$

अथवा $22b=143-33$

अथवा $22b=110$

अथवा $b = \frac{110}{22}$

अथवा $b=5$

ध्यानं ददतु एतत् समाधानं यदा वयं दशकस्य अङ्कः एककात् 3 अधिकं गृहीतवन्तः । पश्यन्तु किं समाधानं मिलति यदा वयं दशकस्य अङ्कं (b-3) इति रूपे गृह्णामः ।

अर्थात् एककस्य अङ्कः $=5$

तदा दशकस्य अङ्कः $= 5+3=8$

अतः संख्या $= 85$

उदाहरणस्य कथनं 58 तथा 85 उभयोः संख्ययोः कृते सत्यम् अस्ति अतः उभौ अपि उत्तरौ समीचीनौ स्तः।

परीक्षणम् - अङ्कं परिवर्त्तने सति संख्या प्राप्ताभवति

58 इति तथा 58 एवं 85 इत्यस्य योगः 143 यथा प्रदत्तम् अस्ति ।

उदाहरणम् 15 अर्जुनस्य आयुः श्रीयायाः आयुतः द्विगुणः वर्त्तते । 5 वर्षं पूर्वं तस्य आयुः श्रीयायाः आयोः त्रिगुणः आसीत् । उभयोः आयुं जानन्तु ।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् श्रीयायाः वर्त्तमान-आयुः = x वर्षः

तदा अर्जुनस्य वर्त्तमान-आयुः =2x वर्षः

श्रीयायाः 5 वर्षं पूर्वं आयुः आसीत् (x-5) वर्षः

तथा अर्जुनस्य 5 वर्षं पूर्वं आयुः आसीत् (2x-5) वर्षः

प्रदत्तम् अस्ति यत् 5 वर्षं पूर्वं अर्जुनस्य आयुः श्रीयायाः आयोः त्रिगुणः आसीत्।

अतः $2x-5=3(x-5)$

अथवा $2x-5=3x-15$

अथवा $15-5=3x-2x$

अथवा $10=x$

अतः श्रीयायाः वर्त्तमान-आयुः = $x=10$ वर्षः

तथा अर्जुनस्य वर्त्तमान-आयुः = $2x=2\times10=20$ वर्षः

प्रश्नावली 2.4

1. अमीना एकां संख्यां विचारयति सा तस्यां $\frac{5}{2}$ इति व्यवकलनं करोति परिणामं 8 इत्यनेन सह गुणनं करोति इदानीं यः परिणामः आगतः सः विचारितायाः संख्यायाः त्रिगुणः वर्त्तते। तां विचारित-संख्यां जानन्तु।

2. द्वयोः संख्ययोः प्रथमा संख्या द्वितीयायाः संख्यायाः 5 गुणिता अस्ति। प्रत्येक-संख्यासु 21 योजने सति प्रथमा संख्या द्वितीयायाः द्विगुणिता भवति। संख्यां जानन्तु।

3. प्रदीयमाना अङ्कद्वयात्मिका या एका-संख्या वर्त्तते तस्याः अङ्कानां योगः 9 इति अस्ति। अस्याः संख्यायाः अङ्कानां स्थानं परिवर्त्य प्राप्त-संख्या प्रदीयमाना संख्यातः 27 अधिका अस्ति। दीयमानां संख्यां जानन्तु।

4. प्रदीयमाना अङ्कद्वयात्मिका या एका-संख्या वर्त्तते तस्याम् एकः अङ्कः द्वितीय-अङ्कात् त्रिगुणितः अस्ति। एतेषाम् अङ्कानां स्थानं परिवर्त्य प्राप्त-संख्यां दीयमानायां संख्यायां योजने सति 88 इति लभ्यते। दीयमानां संख्यां जानन्तु।

5. शोबो इति नामधेयस्य मातुः आयुः शोबो इत्यस्य आयोः षड्गुणितः वर्त्तते। 5 वर्षं पश्चात् शोबो नामधेयस्य आयुः तस्य मातुः वर्त्तमान-आयोः तृतीयांशः भविष्यति। तस्य आयुं जानन्तु।

6. महूली ग्रामे एकः सङ्कुचितः आयताकारः भूखण्डः विद्यालयं निर्मातुं सुरक्षितः अस्ति। अस्य भूखण्डस्य औन्नत्ये वैशाल्ये च 11: 4 इत्यस्य अनुपातः अस्ति। ग्राम-पंचायतः अस्य भूखण्डस्य सीमानं कारितुं रु.100 प्रति मीटर परिमितं मात्रया रु.75000 दातुं भविष्यति। भूखण्डस्य परिमापं जानन्तु।

7. हसनः विद्यालय-गणवेषं निर्मातुं द्वि-प्रकारकं वस्त्रं क्रीणाति। एतस्मिन् युतकस्य वस्त्रस्य मूल्यं 50 रुप्यं प्रति मीटर-परिमितं तथा उरुकस्य वस्त्रस्य मूल्यं 90रु. प्रति मीटर परिमितम् अस्ति। सः युतकस्य प्रत्येकं 3 मीटर-परिमितं वस्त्रस्य कृते उरुकस्य 2 मीटर परिमितं वस्त्रं क्रीणाति। सः एतत् वस्त्रं क्रमशः 12% तथा 10% लाभाय विक्रीय 36,600 रु. प्राप्नोति। सः उरुकाय कियत् वस्त्रं क्रीतवान्?

8. मृगाणाम् एकस्य समूहस्य अर्धभागः क्षेत्रे चरति तथा अवशिष्टस्य ¾ भागः पार्श्वे एव खेलति अवशिष्टः नवसंख्यात्मकः मृगः सरोवरे जलं पिबन्ति। समूहे मृगाणां संख्या का इति जानन्तु ?

9. पितामहस्य आयुः स्व पौत्र्यः आयोः दशगुणितः अस्ति। यदि पितामहस्य आयुः पौत्र्यः आयोः 54 वर्षम् अधिकम् अस्ति तर्हि तयोः आयुं जानन्तु।

10. अमनस्य आयुः तस्य पुत्रस्य आयोः त्रिगुणितः अस्ति। 10 वर्षं पूर्वं तस्य आयुः पुत्रस्य आयोः 5 गुणितः अस्ति। तयोः वर्त्तमान-आयुं जानन्तु।

2.6 समीकरणं सरलरूपे परिवर्त्तनम्

उदाहरणम् 16 : समाधानं करोतु - $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

6 इत्यनेन एव कथं ? ध्यानं ददतु हराणां ल.स.प 6 अस्ति।

समाधानम् - उभौ पक्षौ 6 तः गुणाकारे सति

$$\frac{6(6x+1)}{3}+6\times1=\frac{6(x-3)}{6}$$

अथवा $2(6x+1)+6=x-3$

अथवा $12x+2+6=x-3$ (कोष्ठकम् अपसारणे सति)

अथवा $12x+8=-3$

अथवा $12x-x+8=-3$

अथवा $11x+8=-3$

अथवा $11x=-3-8$

अथवा $11x=-11$

अथवा $x=-1$ (वांछितं समाधानम्)

परीक्षणम् - वामपक्षः $\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

दक्षपक्षः $=\frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$ वामपक्षः=दक्षपक्षः(यथावांछितम् आसीत्)

उदाहरणम् 17 समाधानं करोतु $-5x-2\ (2x-7)=2\ (3x-1)+\frac{7}{2}$

समाधानम् - (कोष्ठकम् अपसारणे सति)

वामपक्षः $=5x-4x+14=x+14$

दक्षपक्षः $=6x-2+\frac{7}{2}=6x-\frac{4}{2}+\frac{7}{2}=6x+\frac{3}{2}$

अतः समीकरणम् $x+14 = 6x + \frac{3}{2}$ अस्ति।

अथवा $14=6x-x+\frac{3}{2}$

अथवा $14=5x+\frac{3}{2}$

अथवा $14-\frac{3}{2}=5x$ $(\frac{3}{2}$ इत्यस्य पक्षान्तरणे सति)

अथवा $\frac{28-3}{2}=5x$

अथवा $\frac{25}{2}=5x$

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् वयं समीकरणं कथं सरलीकृतवन्तः ? वयं समीकरणस्य उभौ पक्षौ समेषां व्यञ्जकानांहराणाञ्च ल.स.प.इत्यनेन गुणाकारं कृतवन्तः

अथवा $x=\frac{25}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{5\times5}{2\times5}=\frac{5}{2}$

अतः वांछितं समाधानम् अस्ति $x = \frac{5}{2}$

परीक्षणम् - वामपक्षः $= 5\times\frac{5}{2}-2\left(\frac{5}{2}\times2-7\right)$

$= \frac{25}{2}-2\ (5-7) = \frac{25}{2}-2\ (-2)=\frac{25}{2}+4=\frac{25-8}{2}=\frac{32}{2}$

दक्षपक्षः $= 2\left(\frac{5}{2}\times3-1\right)+\frac{7}{2}$

ध्यानं ददतु अस्मिन् उदाहरणे वयं कोष्ठकम् अपसार्य तथा समानपदं मेलयित्वा समीकरणं सरलीकृतवन्तः।

$= 2\left(\frac{15}{2}-\frac{2}{2}\right)+\frac{7}{2}=\frac{2\times13}{2}+\frac{7}{2}$

$= \frac{26-7}{2}=\frac{32}{2}=$ (यथावांछितम् आसीत्)

प्रश्नावली 2.5

निम्न-रैखिक-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2}-\frac{3n}{4}+\frac{5n}{6}=21$ **3.** $x+7-\frac{8x}{3}=\frac{17}{6}-\frac{5x}{2}$

4. $\frac{x-5}{3}=\frac{x-3}{5}$ **5.** $\frac{3t-2}{4}-\frac{2t+3}{3}=\frac{2}{3}-t$

6. $m-\frac{m-1}{2}=1-\frac{m-2}{3}$

निम्न-समीकरणं सरलरूपे परिवर्त्य समाधानं कुर्वन्तु ।

7. 3 (t-3)=5 (2t+1)

8. 15 (y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0

9. 3(5z-7)-2(9z-11)=4(8z-13)-17

10. 0.25(4f-3)=0.05(10f-9)

2.7 रैखिकरूपे परिवर्त्तमानं समीकरणम्

उदाहरणम् 18 : समाधानं कुर्वन्तु - $\frac{x+1}{2x+3} = \frac{3}{8}$

समाधानम् - ध्यानं ददतु एतत् समीकरणं रैखिकं नास्ति यतो हि अस्य वामपक्षे व्यञ्जकः रैखिकः नास्ति परन्तु एतत् वयं रैखिकसमीकरणरूपे परिवर्त्तयितुं शक्नुमः । वयं समीकरणस्य उभयं पक्षं (2x+3) इत्यनेन सह गुणाकारं कर्त्तुं शक्नुमः ।

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\times(2x+3) = \frac{3}{8}\times(2x+3)$$

ध्यानं ददतु
$2x+3\neq 0$

(2x+3) इति वामपक्षे निरस्तं भवति तथा वयं प्राप्नुमः ।

$$x+1 = \frac{3(2x+3)}{8}$$

साम्प्रतं वयम् एकं रैखिकसमीकरणं प्राप्तवन्तः यस्मात् वयं समाधानं जानीमः ।
उभौ पक्षौ 8 इत्यतः गुणाकारे सति

$8(x+1)=3(2x+3)$

अथवा $8x+8=6x+9$

अथवा $8x=6x+9-8$

अथवा $8x=6x+1$

अथवा $8x-6x=1$

अथवा $2x=1$

अथवा $x=\frac{1}{2}$

एतत् चरणं वज्र-गुणनप्रक्रियातः अपि प्राप्तुंशक्नोति -
$\frac{x+1}{2x+3} \times \frac{3}{8}$

अतः समाधानम् - $x = \frac{1}{2}$ अस्ति ।

परीक्षणम् - वामपक्षे अंशः $= \frac{1}{2} + 1 \quad \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ अस्ति ।

वामपक्षे हरः - $2x+3=2\times\frac{1}{2}+3=1+3=4$ अस्ति ।

अतः वामपक्षः $=$ अंशः $\div$ हरः $= \frac{3}{2} \div 4 = \frac{3}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$
अर्थात् वामपक्षः = दक्षपक्षः ।

उदाहरणम् 19 अनु इत्यस्य राजस्य च वर्त्तमान-आयोः अनुपातः 4: 5 अस्ति। 8 वर्षं पश्चात् तयोः आयोः अनुपातः 5: 6 भविष्यति। तस्य वर्त्तमान-आयुं जानन्तु।

समाधानम् -स्वीकुर्मः यत् अनु तथा राजस्य वर्त्तमान-आयुः क्रमशः 4 x तथा 5 x अस्ति।

8 वर्षं पश्चात्अनु महोदयस्य आयुः = (4x+8) वर्षम्।

8 वर्षं पश्चात्राजस्य आयुः = (5x+8) वर्षम्।

तयोः आयोः अनुपातः = $\frac{4x+8}{5x+8}$, यत् दत्तम् अस्ति 5: 6

अतः $\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$

वज्रगुणनं कृते सति $6(4x+8)=5(5x+8)$

अथवा $24x+48=25x+40$

अथवा $24x+48-40=25x$

अथवा $24x+8=25x$

अथवा $8=x$

अतः अनु महोदयस्य वर्त्तमान-आयुः $4x=4\times8=32$ वर्षम्।

तथाराजस्य वर्त्तमान- आयुः $5x=5\times8=40$ वर्षम्।

प्रश्नावली 2.6

निम्न-समीकरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

1. $\frac{8x-3}{3x} = 2$ **2.** $\frac{9x}{7-6x} = 15$ **3.** $\frac{z}{z+15} = \frac{4}{9}$

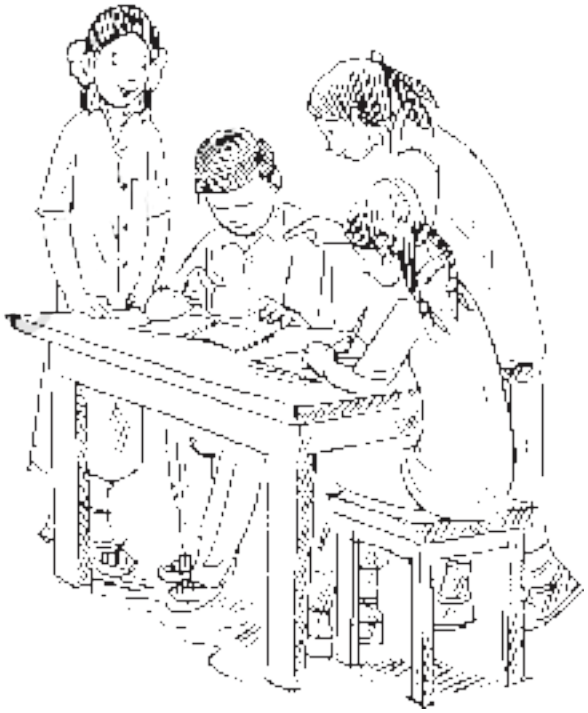
4. $\frac{3y+4}{2-6y} = (-2)/5$ **5.** $\frac{7y+4}{y+2} = \frac{-4}{3}$

6. हरेः हैर्यस्य च वर्त्तमान-आयोः अनुपातः 5: 7 अस्ति। अधुनातः 4 वर्षं पश्चात् तस्य आयोः अनुपातः 3: 4 भविष्यति। तस्य वर्त्तमान-आयुं जानन्तु।

7. एकस्याः परिमेय-संख्यायाः हरः तस्य अंशात् 8 अधिकः अस्ति। यदि अंशे 17 इत्यस्य योगः भवेत् तथा हरे 1 इति व्यवकलनं कुर्यात् तदा वयं $\frac{3}{2}$ प्राप्नुमः। तां परिमेय-संख्यां जानन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. एकं बीजीय-समीकरणं चरेषु एकसमानं भवति । एतत् प्रकटीकरोति यत् समतायाः चिह्नस्य एकपक्षीय व्यञ्जकस्य तस्य अपरपक्षीय व्यञ्जकस्य च मानं समानम् एव अस्ति ।
2. vi, vii तथा viii कक्ष्यायां शिक्षमाणं समीकरणम् एकचरीय रैखिक-समीकरणम् अस्ति । एतेषु समीकरणेषु समीकरणनिर्मातृ व्यञ्जकेषु एकस्य एव चरस्य प्रयोगो भवति । एतदतिरिक्तम् एतत् समीकरणं रैखिकं भवति अर्थात् कृतप्रयोगस्य चरस्य अधिकतमः घातः 1 भवति ।
3. एकस्य रैखिक-समीकरणस्य समाधानं काचिदपि परिमेय-संख्या भवितुम् अर्हति ।
4. समीकरणस्य उभयस्मिन् पक्षे कश्चित् रैखिक-व्यञ्जकः भवितुं शक्नोति । यत् समीकरणं वयं vi, vii कक्ष्यायां शिक्षितवन्तः तेषु कश्मिंश्चित् एकस्मिन् पक्षे केवलं संख्या एव भवति ।
5. संख्यानाम् इव चरान् अपि एकपक्षतः अपरस्मिन् पक्षे पक्षान्तरितुं शक्यते ।
6. प्रायः समीकरण-सम्पादक-व्यञ्जकान् समाधानात् पूर्वं सरलीक्रियन्ते । आरम्भे किञ्चित् समीकरणं रैखिकं न भवति परन्तु तस्य उभयं पक्षम् उपयुक्त-व्यञ्जकेन सह गुणाकारं कृत्वा रैखिक-समीकरणरूपे परिवर्त्तयितुं शक्यते ।
7. रैखिक-समीकरणानाम् उपयोगिता तस्य विविध-अनुप्रयोगेषु अस्ति । संख्या-आयु-परिमाप-मुद्रारूपे प्रयुज्यमानं पणकं रुप्यकञ्च आधारीकृत्य विविध-प्रकारक-समस्याः रैखिकसमीकरणानाम् उपयोगं कृत्वा समाधातुं शक्यते ।



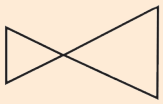
अध्यायः
3

चतुर्भुजानां बोधनम्

3.1 भूमिका

भवन्तः जानन्त्येव यत् कर्गदं समतलस्य एकं प्रतिरूपम् अस्ति। यदा भवन्तः कर्गदात् अङ्कनीम् अपसारणं विनैव परस्परं संयोजयन्ति (केवलं बिन्दुं हित्वा आकृतेः कमपि भागं अनुरेखितं विना) तदा भवन्तः एकं समतलीय वक्रं प्राप्नुवन्ति। गतकक्ष्यायां विविधप्रकारकं दृष्टं वक्रं स्मरितुं प्रयासं कुर्वन्तु।

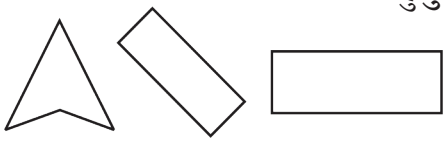
निम्न-आकृतीनां सुमेलनं कुर्वन्तु। (ध्यातव्यं एकस्याः आकृतेः एकाधिक-आकृतिभिः सह सुमेलनं भवितुम् अर्हति।)

आकृतिः	उदाहरणम्
(1)	(a) सरलबन्धः वक्रः अस्ति।
(2)	(b) वक्रबन्धः यः सरलः नास्ति।
(3)	(c) सरलः वक्रः यः बन्धः नास्ति।
(4) 	(d) सरलः वक्रः नास्ति।

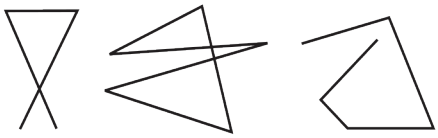
स्वकीय मित्रैः सह अस्य मेलनस्य तुलनां कुर्वन्तु किं ते सहमताः सन्ति ?

3.1 बहुभुजः

केवलं रेखाखण्डेन निर्मितः सरलबन्धः वक्रः **बहुभुजः** इत्यनेन ज्ञायते।



वक्राः ये बहुभुजाः सन्ति।

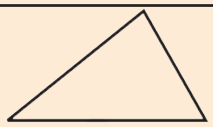
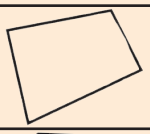
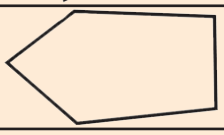
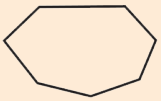
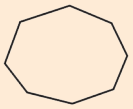
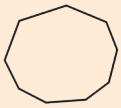


वक्राः ये बहुभुजाः न सन्ति।

केषाञ्चन बहुभुजानां उदाहरणं दातुं प्रयासं कुर्वन्तु तथा कानिचन एतादृशानि उदाहरणानि प्रदर्शयन्तु ये बहुभुजाः न भवेयुः। एकस्य बहुभुजस्य एवमेव आकृतिं लिखन्तु तथा तस्य भुजं शीर्षञ्च जानन्तु।

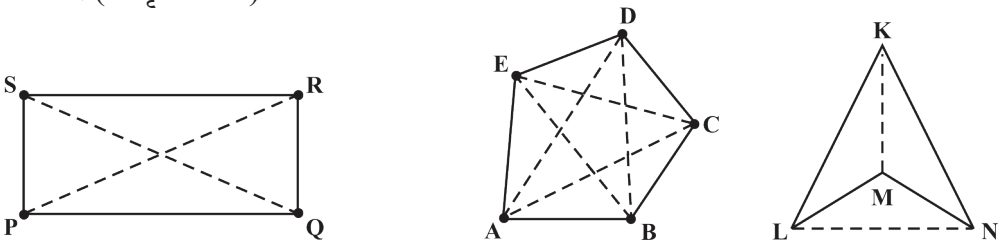
3.2.1 बहुभुजानां वर्गीकरणम्

वयं बहुभुजानां वर्गीकरणं तस्य भुजानां (अथवा शीर्षाणां) अनुसारेण कुर्मः।

भुजानाम् अथवा शीर्षाणां संख्या	वर्गीकरणम्	आकृतेः उदाहरणम्
3	त्रिभुजः	
4	चतुर्भुजः	
5	पंचर्भुजः	
6	षड्भुजः	
7	सप्तभुजः	
8	अष्टभुजः	
9	नवभुजः	
10	दशभुजः	
⋮	⋮	⋮
n	n-भुजः	

3.2.2 विकर्णः

कस्यापि बहुभुजस्य विकर्णः तस्य के अपि द्वे शीर्षे (आसन्नशीर्षं परित्यज्य) योजनेन प्राप्तः रेखाखण्डः भवति। (आकृतिः 3.1)

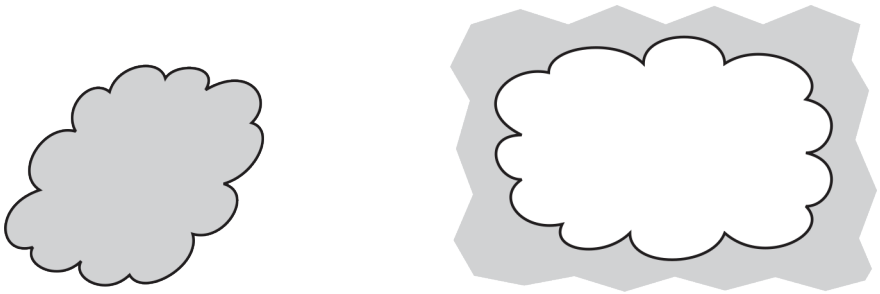


आकृतिः 3.1

किं भवन्तः ऊपरि दत्त-आकृतिसु प्रत्येकं विकर्णं नाम दातुं शक्नुवन्ति ? (आकृतिः 3.1)

किं एकं $\overline{PQ}$ विकर्णम् अस्ति ? $\overline{LN}$ भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

एकस्मिन् बन्धवक्रे अभ्यन्तरस्य बहिर्भागस्य च कः अर्थः अस्ति एतत् भवन्तः सम्यक्तया जानन्ति (आकृतिः 3.2)।

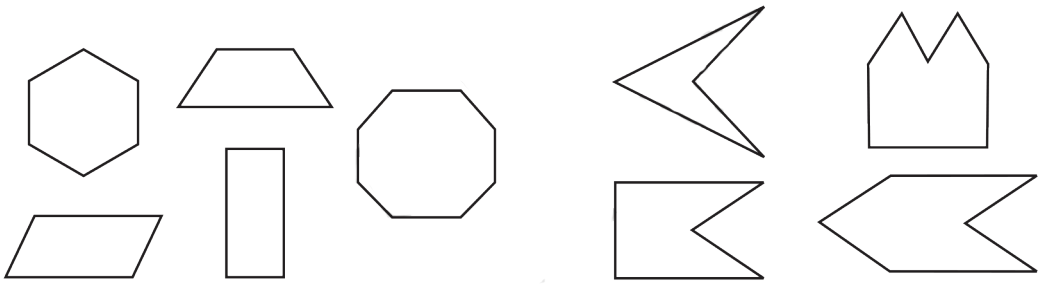


अभ्यन्तरः **आकृतिः 3.2** **बहिर्भागः**

अभ्यन्तरस्य एका परिसीमा भवति। किं बहिर्भागस्य परिसीमा भवति ? स्व मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

3.2.3 उत्तलः अवतलश्च बहुभुजः

अत्र केचन उत्तल बहुभुजाः केचन च अवतल-बहुभुजाः दत्ताः सन्ति। (आकृतिः 3.3)

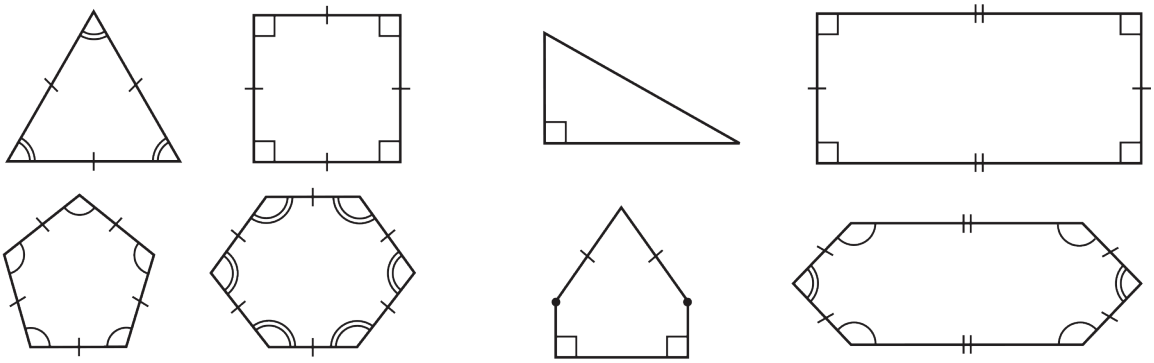


आकृतिः 3.3

किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् ईदृशाः बहुभुजाः परस्परं भिन्नाः कथं सन्ति ? ये बहुभुजाः उत्तलाः सन्ति तस्य विकर्णस्य कश्चिदपि भागः बहिर्भागे न भवति। किम् एषः अवतलः बहुभुजानां कृते अपि सत्यम् अस्ति ? प्रदत्त-आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु। तत् पश्चात् स्व शब्देन उत्तल-बहुभुजम् अवतल-बहुभुजञ्च ज्ञापयितुं प्रयासं कुर्वन्तु। प्रत्येक-प्रकारकम् आकृतिद्वयं निर्मापयन्तु। अस्यां कक्ष्यायां वयं केवलम् उत्तल-बहुभुजानां विषये अध्ययनं करिष्यामः।

3.2.4 समः विषमश्च बहुभुजः

एकः समबहुभुजः, समभुजः समकोणिकश्च भवति। उदाहरणार्थम् एकस्मिन् वर्गे भुजः कोणश्च समान-परिमापे भवति। अत एव एषः एकः सम-बहुभुजः अस्ति। एकः आयतः समकोणिकः तु भवति परन्तु समभुजः न भवति। किम् एकः आयतः एकः सम-बहुभुजः अस्ति ? किम् एकः समबाहु-त्रिभुजः एकः सम-बहुभुजः अस्ति ? कथम् ?



सम-बहुभुजः विषम-बहुभुजः

[सङ्केतः अथवा एतस्य उपयोगः समानं लम्ब-रेखाखण्डान् दर्शयति ।]

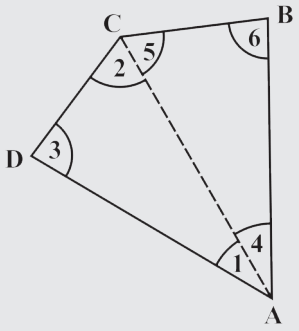
गतकक्ष्यायां किं भवन्तः एतादृश-चतुर्भुज-विषयं पठितवन्तः यः समभुजः तु स्यात् परन्तु समकोणिकः न भवेत् ? गतकक्ष्यायाः दृष्टमानानाम् आकृतीनां स्मरणं कुर्वन्तु यथा - आयतः, वर्गः, समचतुर्भुजः इत्यादि । किं कश्चित् एतादृशः त्रिभुजः अस्ति यः समभुजः तु स्यात् परन्तु समकोणिकः न ?

3.2.5 कोण-योगः गुणधर्मः

किं भवन्तः एकस्य त्रिभुजस्य कोणयोगयुक्तं गुणधर्मं स्मरन्ति ? एकस्य त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां मापस्य योगः 180° अस्ति । वयमिदं तथ्यं बोधयितुं यस्य विधेः उपयोगं कृतवन्तः तं विधिं स्मरन्तु । इदानीं वयम् एताम् अवधारणाम् एकस्य चतुर्भुजस्य कृते प्रयोगं कुर्मः ।

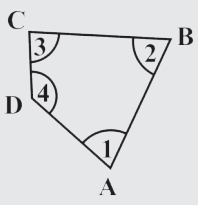
एतत् कुर्वन्तु

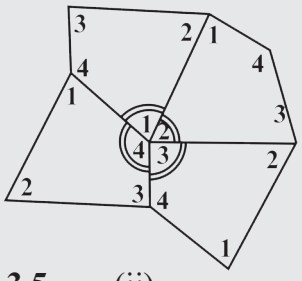
1. कञ्चित् एकं चतुर्भुजं, स्वीकुर्वन्तु ABCD (आकृतिः 3.4) । एकं विकर्णं संलेख्य एतत् त्रिभुजद्वये विभजन्तु । भवन्तः षड्कोणं 1,2,3,4,5 तथा 6 इति प्राप्स्यन्ति । त्रिभुजस्य कोणयोगयुक्तस्य गुणधर्मस्य उपयोगं कुर्वन्तु तथा तर्कयन्तु यत् कथं ∠A∠B ∠C तथा∠D इत्येषांमापस्य योगफलं 180°+ 180°=360° इति भवति ।



आकृतिः 3.4

2. कश्चित् चतुर्भुजः ABCD इत्यस्य चत्वारि पुस्तमयीं सर्वाङ्गसम-प्रतिलिपिं गृह्णन्तु यस्य कोणं दर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.5(i) एतां प्रतिलिपिम् एवंरीत्या व्यवस्थितं कुर्वन्तु यस्मात्





(i) **आकृतिः 3.5** (ii)

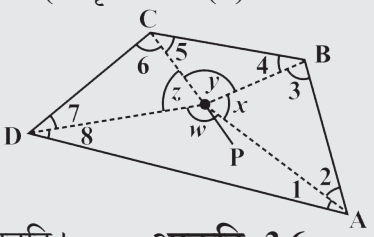
एवं कर्तुं भवन्तः सम्यक्तया कोणं सम्मेल्य तं परिवर्तितुं शक्नुवन्ति येन ते कोणाः सम्यक्तया स्थिताः भवेयुः ।

∠1,∠2,∠3,∠4 एकस्मिन्नेव बिन्दौ मिलेत् यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.5 (ii)।

भवन्तः ∠1, ∠2, ∠3, तथा∠4 एतेषां योगफलविषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

[टिप्पणी - वयं कोणान् ∠1, ∠2, ∠3 इत्यादिना तथा तस्य मापं m∠1, m∠2, m∠3 इत्यादिना दर्शयामः]

एकस्य चतुर्भुजस्य चतुर्णां कोणानां मापस्य योगफलं ..... भवति।

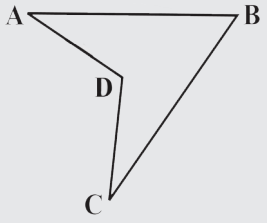


आकृतिः 3.6

भवन्तः अस्मिन् परिणामे अन्यरीत्या अपि गन्तुं शक्नुवन्ति।

3. चतुर्भुजः ABCDइत्यस्मिन् पुनः विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 3.6)। स्वीकुर्वन्तु यत् एतस्य अभ्यन्तरे कश्चित् बिन्दुः P इति स्थितः वर्त्तते। P इति शीर्षेण A, B, C तथा Dइत्यनेन सह संयोजयन्तु। आकृतौ Δ PAB इत्यस्मिन्विचारं कुर्वन्तु। वयं पश्यामः यत् x= 180°-m∠2-m∠3 एवमेव Δ PBC इत्यतः y= 180°-m∠4-m∠5, Δ PCD इत्यतः z= 180°-m∠6-m∠7 तथा Δ PDA, w= 180°-m∠8-m∠1 अस्य उपयोगं कृत्वा सम्पूर्णं मापनं m∠1+m∠2+···+m∠8 जानन्तु। किम् एतत् भवतः परिणामं यावत् गन्तुं साहाय्यं करोति ? स्मरन्तु∠x-+∠y+∠z+∠w=180°अस्ति।

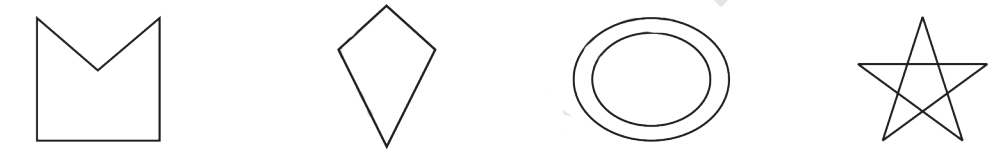
4. एते सर्वे चतुर्भुजाः उत्तल-चतुर्भुजाः आसन् यदि उत्तलाः न भवन्ति चेत् किं भवेत् ? चतुर्भुजः ABCD इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु। एतं त्रिभुजद्वये विभज्य अन्तः कोणानां योगफलं जानन्तु ? (आकृतिः 3.7)



आकृतिः 3.7

प्रश्नावली 3.1

1. अत्रकाश्चनआकृतयः प्रदत्ताः सन्ति।



(i) (ii) (iii) (iv)

(v) (vi) (vii) (viii)

प्रत्येकस्यवर्गीकरणंनिम्नलिखिताधारेकुर्वन्तु।

(a) साधारणवक्रः (b) साधारणबन्धवक्रः (c) बहुभुजः

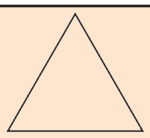
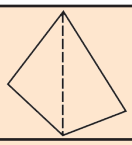
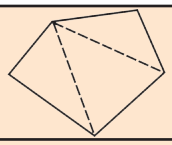
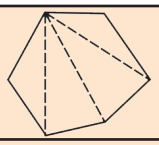
(d) उत्तलबहुभुजः (e) अवतलबहुभुजः

2. निम्नलिखिते प्रत्येकस्मिन् कति विकर्णाः सन्ति ?

(a) एकः उत्तलः चतुर्भुजः (b) एकः समषड्भुजः (c) एकः त्रिभुजः

3. उत्तल-चतुर्भुजस्य कोण-मापानां योगफलं किम् अस्ति ? यदि चतुर्भुजः उत्तलः न भविष्यति तदा किं एतस्य गुणस्य प्रवृत्तिः भविष्यति ? (एकं चतुर्भुजंनिर्मान्तु यः उत्तलः न स्यात् तथा प्रयासं कुर्वन्तु।)

4. तालिकायाः परीक्षणं कुर्वन्तु। (प्रत्येक-आकृतिं त्रिभुजेषु विभजन्तु तथाकोणानां योगफलं जानन्तु।)

आकृतिः				
भुजा	3	4	5	6
कोणानां योगफलम्	180°	$2\times180^\circ$ $=(4-2)\times180^\circ$	$3\times180^\circ$ $=(5-2)\times180^\circ$	$4\times180^\circ$ $=(6-2)\times180^\circ$

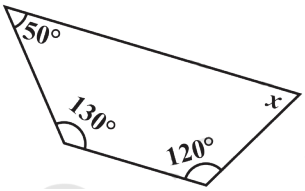
एकस्य बहुभुजस्य कोणयोगानां विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति येषां भुजानां संख्या निम्नलिखिता भवेत् ?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

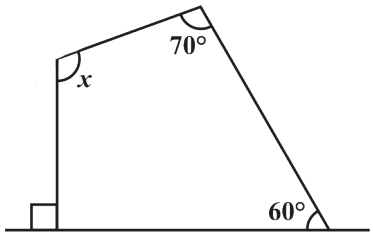
5. समबहुभुजः कः अस्ति ? एकस्य समबहुभुजस्य नाम ज्ञापयतु यस्मिन् -

(i) 3 भुजाः (ii) 4 भुजाः (iii) 6 भुजाः भवेयुः

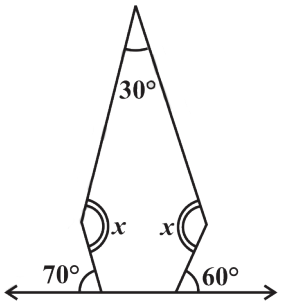
6. निम्नलिखित-आकृतिसु x (कोणस्य मापं) जानन्तु ?



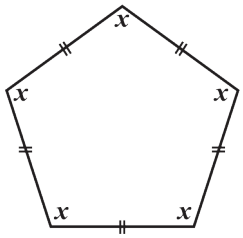
(a)



(b)

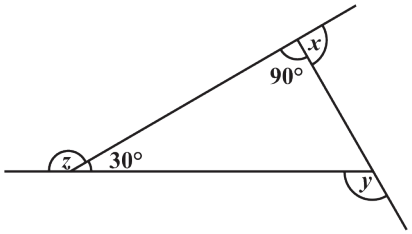


(c)

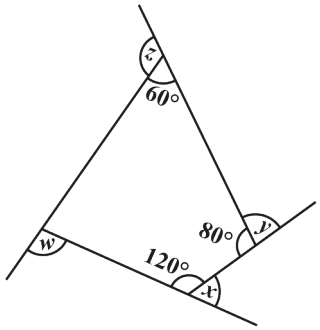


(d)

7.



(a) x+y+z जानन्तु ?



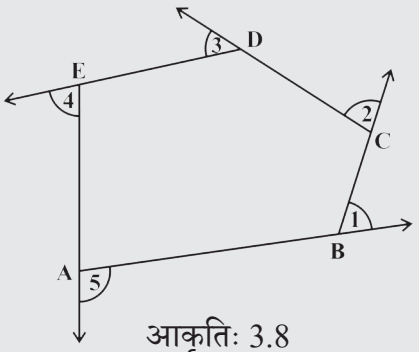
(b) x+y+z+w जानन्तु ?

3.3 एकस्य बहुभुजस्य बाह्यकोणमापानां योग

बहुषु अवसरेषु बाह्यकोणानां ज्ञानम् अन्तः कोणस्य भुजस्य च प्रकृतिं प्रकाशयति।

एतत् कुर्वन्तु

एकेन सुधाखण्डेन भूमौ एकं बहुभुजं निर्मापयन्तु। (आकृतौ एकः पञ्चभुजः ABCDE प्रदर्शितम् अस्ति) (आकृतिः 3.8)। वयं सर्वेषां कोणमापानां योगं ज्ञातुम् इच्छामि अर्थात् $m\angle1+m\angle2+m\angle3+m\angle4+m\angle5$ अस्ति। Aतः आरम्भं कुर्वन्तु तथा एकंAB इत्यस्य अनुपालनं कुर्वन्तु ।Bइत्यस्मिन् गमनानन्तरं $m\angle1$ इत्यस्मिन् भवतः कृते भ्रमणस्य आवश्यकता भविष्यति यस्मात् भवन्तःBC इत्यस्य अनुदेशानुसारं चलितुं शक्नुयुः। C इत्यस्मिन् गमनानन्तरं CD इत्यस्य अनुदेशे चलितुं $m\angle2$ इत्यस्मिन् भवतः कृते भ्रमणस्य आवश्यकता भविष्यति भवन्तःएवमेव चलनारम्भं कुर्युः यावत् भवन्तःAइति न प्राप्नुवन्ति। वास्तविकरूपे एवं रीत्या भवन्तः एकं चक्रं भ्रमितवन्तः। अतएव $m\angle1+m\angle2+m\angle3+m\angle4+m\angle5= 360^\circ$ अस्ति। एकस्य बहुभुजस्य यावन्तः भुजाः स्युः तेषां सर्वेषां
कृते एतत् सत्यम् अस्ति।



आकृतिः 3.8

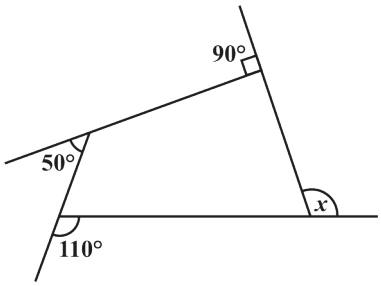
अतः कस्यापि बहुभुजस्य बाह्यकोणमापानां योगः 360° भवति।

उदाहरणम् - 1 आकृतिः 3.9 इत्यस्मिन् x मापं जानन्तु।

समाधानम् - $x+90^\circ + 50^\circ + 110^\circ =360^\circ$ (कथम् ?)

$x+250^\circ=360^\circ$

$x=110^\circ$



प्रयासं करोतु

एकं षड्भुजं गृह्णन्तु (आकृतिः 3.10)।

(i) बाह्यकोणाः x,y,z,p,q तथा r एतेषां मापानां योगः कः ?

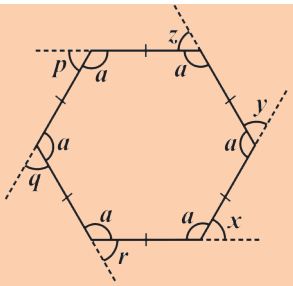
(ii) किं x=y=z=p=q=r अस्ति ? कथम् ?

(iii) प्रत्येकस्य मापनं किम् ?

(i) बाह्यकोणः (ii) अन्तः कोणः

(iv) एतं क्रियाकलापं निम्नलिखितस्य कृते अभ्यासं कुर्वन्तु।

(i) एकः सम-अष्टभुजः (ii) एकः समः 20 भुजः



आकृतिः 3.10

उदाहरणम् - 2 एकस्य समबहुभुजस्यभुजानां संख्यां जानन्तु येषां प्रत्येकं बाह्य कोणस्य मापनं 45° अस्ति।

समाधानम् - सर्वेषां बाह्यकोणानां सम्पूर्णं मापनं = 360°

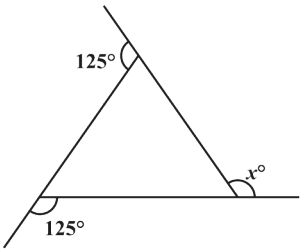
प्रत्येकं बाह्य कोणस्य मापनं = 45°

अतः बाह्यकोणानां संख्या $= \frac{360}{45} = 8$

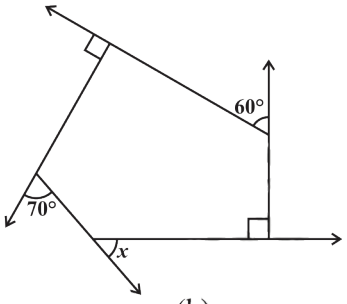
अतः बहुभुजस्य 8 भुजाः सन्ति।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित-आकृतिसु x इत्यस्य मानं जानातु।



(a)



(b)

2. एकस्य समबहुभुजस्य प्रत्येकं बाह्यकोणस्य मापं जानन्तु येषां

(1) 9 भुजाः (ii) 15 भुजाः भवेयुः।

3. एकस्य समबहुभुजस्य कति भुजाः भविष्यन्ति यदि एकस्य बाह्यकोणस्य मापनं 24° भवेत् ?

4. एकस्य समबहुभुजस्यभुजानां संख्यां जानन्तु यदि अस्य प्रत्येकम् अन्तःकोणः 165° इत्यस्य भवेत् ?

(a) किम् एतादृशः समबहुभुजः सम्यक् अस्ति यस्य प्रत्येकं बाह्यकोणस्य मापनं 22° भवेत् ?

(b) किम् एषः कस्यापि समबहुभुजस्य अन्तःकोणः भवितुं शक्नोति ? कथम् ?

(a) कस्यापि समबहुभुजे न्यूनातिन्यूनं कति अंशस्य अन्तःकोणः सम्भवः अस्ति ? कथम् ?

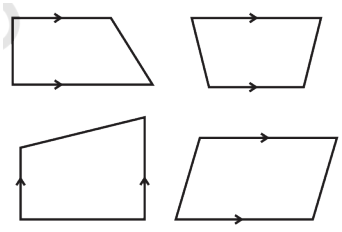
(b) कस्यापि समबहुभुजे अधिकाधिकं कति अंशस्य बाह्यकोणः सम्भवः अस्ति ?

3.4 चतुर्भुजानां प्रकारः

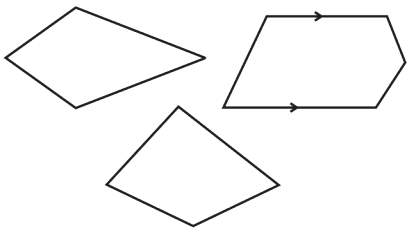
एकस्य चतुर्भुजस्य भुजानां कोणानाञ्च प्रकृत्याधारे एषः विशिष्ट-नाम्ना ज्ञायते।

3.4.1 समलम्बः

समलम्बः एकः एतादृशः चतुर्भुजः भवति यस्मिन् भुजानाम् एकः युग्मः समान्तरः भवति।



एते समलम्बाः सन्ति

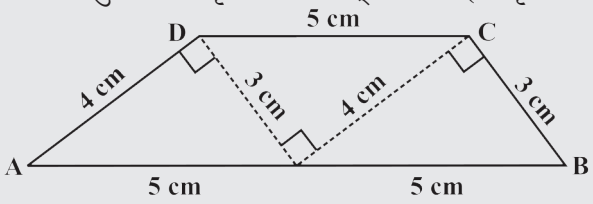


एते समलम्बाः न सन्ति

उपरोक्त-आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु अथ स्व मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु यत् कथम् एतेषु केचन समलम्बाः सन्ति अथ केचन समलम्बाः न सन्ति। (**सङ्केतः** - बाणस्य चिह्नं समान्तर-रेखां दर्शयति।)

एतत् कुर्वन्तु

1. समान-सर्वाङ्गसमत्रिभुजानाम् अर्धं भागं गृह्णन्तु येषां भुजाः 3cm,4cm,5cm सन्ति। एतान् व्यवस्थितं करोतु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। (आकृतिः 3.11)।



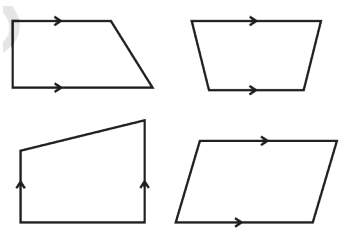
आकृतिः 3.11

भवन्तः एकं समलम्बं प्राप्नुवन्ति। (निरीक्षणं कुर्वन्तु)
अत्र के भुजाः समानाः सन्ति ? किम् असमानान्तर-भुजाः समान-मापकस्य भवेयुः ?
एतेषां समान-त्रिभुज-समूहानाम् उपयोगं कृत्वा भवन्तः समलम्बद्वयं प्राप्तुं शक्नुवन्ति। तान् अन्वेषयन्तु तथा तेषाम् आकृतीनां चर्चां कुर्वन्तु।

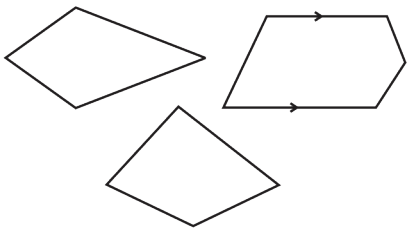
2. स्वस्य तथा स्वस्य मित्राणां ज्यामितीय मञ्जूषातः चत्वारि सेटस्क्वेयर इति गृह्णन्तु। एतत् पृथक्-पृथक् संख्यासु उपयोगं कृत्वा स्व पार्श्वे रक्षन्तु तथा विविधप्रकारकं समलम्बं प्राप्नुवन्तु।
यदि समलम्बस्य असमानन्तरभुजाः समान-लम्बमानाः स्युः तर्हि वयम् एतत् समद्विबाहु-समलम्बरूपेण कथयामः। किं भवन्तः ऊपरि क्रियमाणे निरीक्षणे कमपि समद्विबाहु-समलम्बं प्राप्तवन्तः ?

3.4.2 पतङ्गः

पतङ्गः विशिष्ट-प्रकारकः एकः चतुर्भुजः अस्ति। प्रत्येक-आकृतौ एकसमानं चिह्नं समानं भुजं प्रदर्शयति।
उदाहरणार्थम् -AB=AD तथा BC=CD



एते पतङ्गाः सन्ति



एते पतङ्गाः न सन्ति

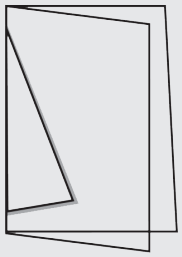
एतासाम् आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा एतत् ज्ञापयितुं प्रयासं कुर्वन्तु यत् पतङ्गः कः अस्ति। निरीक्षणं कुर्वन्तु।

(1) एकस्मिन्पतङ्गे 4 भुजाः भवन्ति (एषः एकः चतुर्भुजः अस्ति)।

(ii) एतस्मिन् **पृथक्-पृथक् आसन्न-भुजानां** युग्मद्वयं भवति यस्य लम्बमानं समानं भवति।

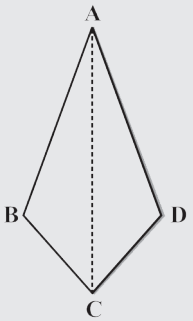
एतत् कुर्वन्तु

एकस्य स्थूलकर्गदस्य भागं गृह्णन्तु तं द्विगुणं कुर्वन्तु। पृथक्-पृथक् लम्बायमानं रेखाखण्डद्वयं लिखन्तु यथा आकृतिः 3.12 इत्यस्मिन् प्रदर्शितम् अस्ति। एतस्य रेखाखण्डस्य अनुदिशं कर्त्तयित्वा उद्घाटयन्तु। भवन्तः एकस्य पतङ्गस्य आकृतिं प्राप्नुवन्ति (आकृतिः 3.13)।



आकृतिः 3.12

प्रदर्शयन्तुयत् Δ ABC एवं Δ ADC सर्वाङ्गसमः अस्ति। एतेन भवन्तः कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति।



आकृतिः 3.13

किं पतङ्गे काचित् सममित-रेखा अस्ति ?

पतङ्गम् उभयस्मिन् विकर्णे वक्रीकुर्वन्तु सेट-स्क्वेयर इत्यस्य उपयोगेन परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं सः परस्परं समकोणे कर्त्तयति।

किं विकर्णः समान-लम्बायमानः अस्ति ?

परीक्षणं कुर्वन्तु (कर्गदं द्विगुणकरणेन अथ मापनेन) यत् किं विकर्णः परस्परं समद्विभाजितं करोति ?

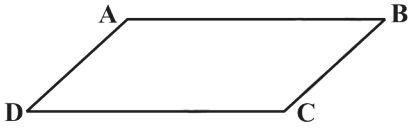
पतङ्गस्य एकं कोणं एकस्य विकर्णस्य अनुदिशं विपरीतं द्विगुणिते कृते समानमापीयकोणस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

विकर्णोपरि स्थितस्य तलस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु किम् एतत् प्रदर्शयति यत् विकर्णस्य एकः कोणः समद्विभाजकः भवति ?

स्व ज्ञानविषये सहपाठिभिः सह चर्चां करोतु तथा एकां सूचीं निर्मापयन्तु। एतेषां परिमाणानां सारांशः अध्याये एव कुत्रापि भवतः कृते प्रदत्तः अस्ति।

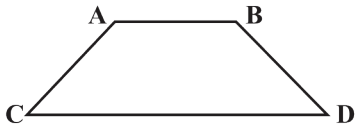
3.4.3 समान्तर-चतुर्भुजः

समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः एव अस्ति। यथा नाम सङ्केतं करोति अस्य सम्बन्धः समान्तर-रेखाभिः सह अस्ति।

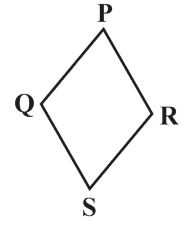


$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

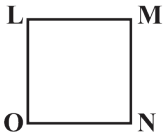


$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



$\overline{QP} \parallel \overline{SR}$

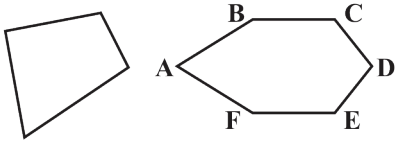
$\overline{QS} \parallel \overline{PR}$



$\overline{LM} \parallel \overline{ON}$

$\overline{LO} \parallel \overline{MN}$

एते समान्तर-चतुर्भुजाः सन्ति



$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$

$\overline{BC} \parallel \overline{FE}$

एते समान्तर-चतुर्भुजाः न सन्ति

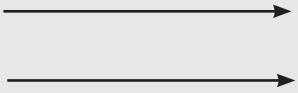
एतासाम् आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा स्वशब्दैः ज्ञापनार्थं प्रयासं कुर्वन्तु यत् समान्तर-चतुर्भुजः किम् अस्ति। स्वनिष्कर्षं स्वकीय मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

भिन्न-भिन्न वैशाल्य-युक्ते पुस्तस्य द्वे आयताकार-पट्टिके स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 3.14)।

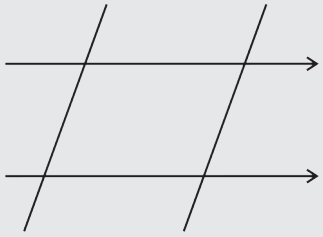
पट्टिका 1 **आकृतिः 3.14** पट्टिका 2

एकस्य पुस्तस्य पट्टिकां समतले स्थापयन्तु तथा अस्याः तटस्य अनुदिशं रेखां कुर्वन्तु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.15)।

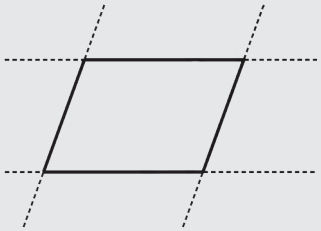


आकृतिः 3.15

इदानीं द्वितीयां पट्टिकां अङ्कित-रेखायाम् ऊपरि तिर्यक्दिशि स्थापयन्तु तथा एतस्याः उपयोगं कुर्वन्तः इतोऽपि रेखाद्वयं रचयन्तु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.16)।



आकृतिः 3.16



आकृतिः 3.17

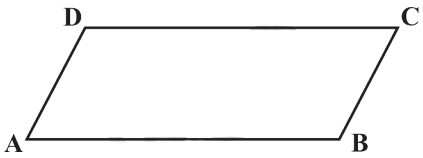
एताभिः चतसृभिः रेखाभिः निर्मिता बन्धाकृतिः चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.17)।

एषा समान्तर-रेखायाः युग्मद्वयेन सम्मिल्य निर्मिता। एषः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति।

समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः भवति यस्य सम्मुख-भुजाः समान्तराः भवन्ति।

3.4.4 समान्तर-चतुर्भुजानाम् अवयवाः

एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे चत्वारः भुजाः चत्वारः कोणाश्च भवन्ति। एतेषु केचन समान-मापकाः भवन्ति।भवता एतैः अवयवैः सम्बद्धाः केचन तथ्याः स्मर्तुम् आवश्यकाः।



आकृतिः 3.18

एकः समान्तर-चतुर्भुजः ABCD प्रदत्तः अस्ति (आकृतिः 3.18)।

$\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ अस्य सम्मुख-भुजाः सन्ति। $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ सम्मुख-भुजानां द्वितीयं युग्मं निर्मान्तु।

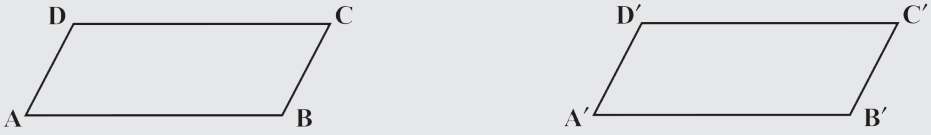
∠Aतथा ∠C सम्मुख-कोणानां एकः युग्मः अस्ति एवमेव ∠B तथा ∠D सम्मुख-कोणानां एकः द्वितीयः युग्मः अस्ति।

$\overline{AB}$ तथा $\overline{BC}$ समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-भुजाः सन्ति। अतः यतः एकः भुजः समाप्तः भवति ततः एव द्वितीयः भुजः प्रारम्भः भवति। किं $\overline{BC}$ तथा $\overline{CD}$ अपि आसन्न-भुजाः सन्ति।आसन्न-भुजानां युग्मद्वयम् इतोऽपि अन्वेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु ।

∠A तथा ∠B समान्तर-चतुर्भुजस्य **आसन्न-कोणाः** सन्ति। उभौ अपि कोणौ उभयनिष्ठ-भुजानां अन्त-बिन्दौ स्थितौ वर्त्तेते। ∠Bतथा ∠C अपि आसन्न-कोणाः सन्ति। समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणानां द्वितीयं युग्मं जानन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

समान-समान्तर-चतुर्भजस्य अर्धं भागद्वयं ABCD तथा A'B'C'D गृह्णन्तु(आकृतिः 3.19).



आकृतिः 3.19

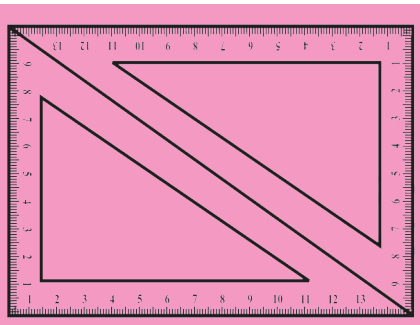
अत्र $\overline{AB}$ भुजः $\overline{A'B'}$ भुजस्य समानः अस्ति परन्तु अस्य नाम पृथक्-पृथक् अस्ति। एवमेव अपर- सङ्गत-भुजाः अपि समानाः सन्ति।

$\overline{A'B'}$ इति $\overline{DC}$ इत्यस्य उपरि लिखन्तु, किं तत् परस्परं पूर्णतया आच्छादयति ? इदानीं भवन्तः $\overline{A'B'}$ तथा $\overline{DC}$ इत्यस्य औन्नत्यविषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

एवमेव $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ इत्यस्य औन्नत्यस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति?

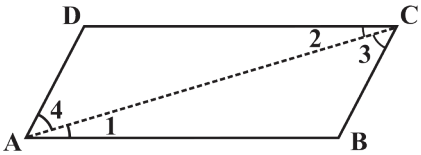
भवन्तः $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ इति मापं कृत्वा एतं परिणामं प्राप्तुम् अर्हन्ति ।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजाः समान-मापकाः भवन्ति ।



आकृतिः 3.20

30°- 60°- 90° कोणीय समानं सेट-स्क्वेयरद्वयं गृह्णन्तु। इदानीम् एतत् इत्थं रीत्या परस्परं सम्मेल्य रक्षन्तु यस्मात् एकः समान्तरः चतुर्भुजः भवेत् (आकृतिः 3.20)। किम् एतत् उपरोक्त-गुणस्य पुष्टिं कर्तुं भवतां साहाय्यं करोति ?



भवन्तः तर्क-वितर्केन एताम् अवधारणां प्रभावितुं शक्नुवन्ति।

एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे ABCD इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 3.21)। **आकृतिः 3.21**

एकं विकर्णं $\overline{AC}$ इति निर्मापयन्तु। वयं पश्यामः यत् $\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ (कथम् ?) यतो हि त्रिभुजः ABC तथा ADC इत्यस्मिन् $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ तथा AC उभयनिष्ठः वर्त्तते अत एव ASA सर्वाङ्गसमता निकषेण Δ ABC $\cong$ Δ CDA(अत्र ASA निकषस्य प्रयोगः कथम् अभवत् ?)

अतः AB= DC तथाBC= AD.

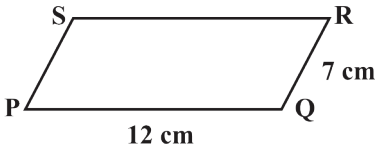
उदाहरणम् 3 - समान्तर-चतुर्भुजस्य PQRS इत्यस्य परिमापं जानन्तु (आकृतिः 3.22)।

समाधानम् - समान्तर-चतुर्भुजे सम्मुख-भुजाः समानलम्बस्य भवन्ति।

अतएव PQ= SR=12cm तथा QR= PS=7cm

अतः परिमापनं =PQ+QR+SR+SP

=12cm+7cm+12cm+7cm=38cm



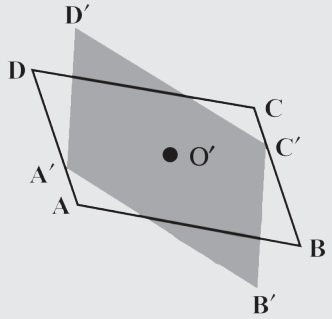
आकृतिः 3.22

3.4.5 समान्तर-चतुर्भुजस्य कोणः

वयं समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजसम्बन्धितस्य एकस्य गुणस्य अध्ययनं कृतवन्तः। वयं कोणानां विषये किं वक्तुं शक्नुमः ?

एतत् कुर्वन्तु

स्वीकुर्वन्तु यत् ABCD एकः समान्तरः चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.23)। अनुकरणपत्रे अस्य प्रतिलिपिं निर्मापयन्तु । एतां प्रतिलिपिं A'B'C'D इत्यनेनप्रदर्शयन्तु । A'B'C'D इति ABCD इत्यस्मिन् आच्छादितं कुर्वन्तु। उभयमपि चतुर्भुजं परस्परं सम्मेल्य तस्मिन् बिन्दौ पिन इति संस्थापयन्तु यत्र तस्य विकर्णं प्रतिच्छेदयन्ति अनुकरण-पत्रं 180° परिभ्रामयन्तु । समान्तरः चतुर्भुजः इदानीमपि परस्परं पूर्णतया आच्छादयति परन्तु साम्प्रतं भवन्तः पश्यन्ति यत् A' पूर्णरूपेण C इत्यस्मिन् तथा Cपूर्णरूपेण B' इत्यस्मिन् आगच्छति। एवमेव B' बिन्दुः Dइत्यस्मिन् गच्छति तथा विलोमरूपेणापि सत्यम् अस्ति।



आकृतिः 3.22

किम् एषः कोणः तथा इत्यस्य मापविषये भवन्तं किञ्चित् ज्ञापयति। कोणः तथा इत्यस्य मापस्य कृते परीक्षणं कुर्वन्तु स्व-निष्कर्षविषये चर्चां कुर्वन्तु।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-कोणः समानमापकः भवति।

प्रयासं करोतु

30°- 60°- 90° कोणीय समानं सेट-स्क्वेयरद्वयं संगृह्य पूर्वम् इव
एकं समान्तरं चतुर्भुजं निर्मापयन्तु। किं प्राप्ताकृतिः उपरोक्तगुणस्य पुष्टिकरणे भवतां सहायतां करोति।

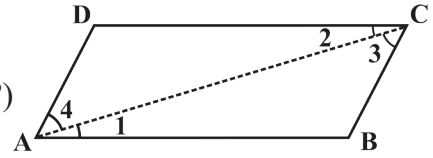
भवन्तः तर्क-वितर्केन एताम् अवधारणां पुष्टीकर्त्तुं शक्नुवन्ति।

यदि $\overline{AC}$ तथा $\overline{BD}$ समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णः स्याताम्

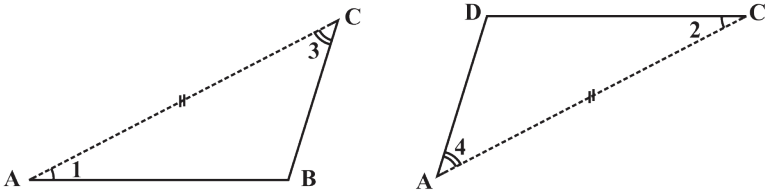
(आकृतिः 3.24) तर्हि भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् ∠1= ∠2 तथा ∠3= ∠4 (कथम् ?)

Δ ABC तथा Δ CDA इत्यनयोः पृथक्-पृथक् अध्ययनं करणे सति भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् ASA सर्वाङ्गसम निकषस्य प्रयोगेण

Δ ABC ≅ Δ CDA (कथम् ?)



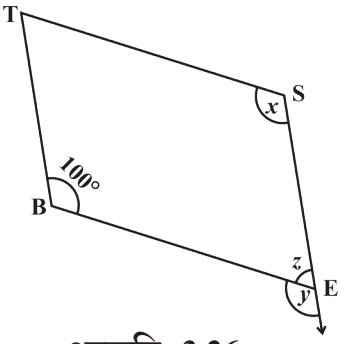
आकृतिः 3.24



आकृतिः 3.25

एतत् प्रदर्शयति यत् ∠B तथा ∠D समान-मापकः अस्ति। इत्थं भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् m∠A=m∠C

उदाहरणम् 4 - आकृतिः 3.26 इत्यस्मिन् BEST एकः समान्तरः चतुर्भुजः अस्ति। x, y तथा z इत्येतेषां मानं जानन्तु ।



आकृतिः 3.26

समाधानम् -S बिन्दुः बिन्दुः B इत्यस्य विपरीतः अस्ति।

अतः x=100°(सम्मुखकोणगुणः)

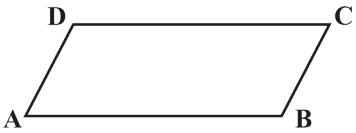
y=100°(∠x इत्यस्य सङ्गतकोणस्य मापनम्)

z=80° (यतो हि ∠y तथा ∠z रैखिकयुग्मं निर्मापयति)

अधुना वयं स्वध्यानं एकस्य समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्नकोणे केन्द्रितं कुर्मः।

समान्तर-चतुर्भुजे ABCD (आकृतिः 3.27)∠Aतथा∠D सम्पूरक-कोणाः सन्ति।

यतोहि $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ तथा DA एका तिर्यक्-रेखा अस्ति। अतः कोणद्वयम् अन्तः सम्मुख-कोणः अस्ति। ∠Aतथा∠B सम्पूरक-कोणाः सन्ति।



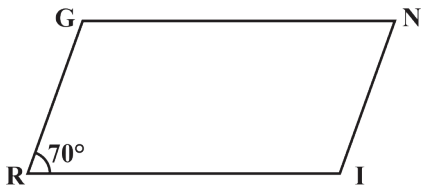
आकृतिः 3.27

किं भवन्तः ज्ञापितुं शक्नुवन्ति 'कथम्' ?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ तथा $\overline{BA}$ एका तिर्यक्-रेखा अस्तिया ∠Aतथा∠B इति अन्तः सम्मुख-कोणरूपे परिवर्त्तयति। आकृतितः द्वयं तथा सम्पूरक-कोणानां युग्मान् परिचिन्वन्तु।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणाः सम्पूरकाः भवन्ति।

उदाहरणम् 5 - समान्तर-चतुर्भुजे RING इत्यस्मिन् (आकृतिः 3.28) यदि m∠R=70° भवेत् तर्हि अपरान् सर्वान् कोणान् जानन्तु।



आकृतिः 3.28

समाधानम् -प्रदत्तम् अस्ति -m∠R=70°

तदा m∠R=70°

यतो हि ∠Rतथा∠Iसम्पूरक-कोणः अस्ति ।

m∠I=180°- 70°=110°

तथा m∠G=110°यतोहि ∠G,∠Iइत्यस्य सम्मुख-कोणः वर्त्तते।

अतः m∠R=m∠N= 70°तथाm∠I=m∠G=110°

विचारयन्तु चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

m∠R=m∠N= 70° इति प्रदर्शनानन्तरं किं भवन्तः केनचित् अन्येन विधिना m∠I तथाm∠G इति ज्ञातुम् अर्हन्ति ?

3.4.6 समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णः

सामान्यतया समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णाः समान-मापकाः न भवन्ति।

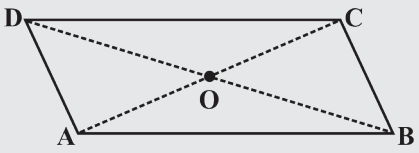
(किं भवन्तः स्वकीये पूर्वक्रियाकलापे अस्य परीक्षणं कृतवन्तः)

यद्यपि समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णेषु एकः रोचकः गुणः भवति।

एतत् कुर्वन्तु

समान्तर-चतुर्भुजः (स्वीकुर्वन्तु ABCD) अस्य एकं कर्तितम् अर्धं भागं गृह्णन्तु (आकृतिः 3.29)।

स्वीकुर्वन्तु यत् अस्य विकर्णः $\overline{AC}$ तथा $\overline{DB}$ परस्परं 'O' इत्यस्यउपरि प्रतिच्छेदयति।



आकृतिः 3.29

C इति A उपरि संस्थाप्य एकेन तलेन $\overline{AC}$ इत्यस्य मध्य-बिन्दुं जानन्तु। किं मध्य-बिन्दुः O अस्ति ? किम् एतत् प्रदर्शयति यत्विकर्णः $\overline{DB}$ विकर्णः $\overline{AC}$ इति बिन्दुः 'O' इत्युपरि समद्विभाजितं करोति ? स्वकीय मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। एतं क्रियाकलापं एतत् ज्ञातुं पुनः कुर्वन्तु यत् $\overline{DB}$ इत्यस्य मध्य बिन्दुः कुत्र स्थितः भविष्यति।

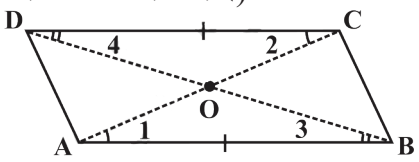
गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णः परस्परं समद्विभाजितं करोति। (अवश्यमेव तस्य प्रतिच्छेदबिन्दौ।)

अस्य गुणस्य तर्क-वितर्कं पुष्टिञ्च कर्त्तुं कठिनं नास्ति। आकृतिः 3.30

इत्यस्मात् ASA सर्वाङ्समता-प्रतिबन्धेन अत्यन्त-सरलरीत्या द्रष्टुं शक्यते यत्

Δ AOB = Δ COD (अत्र ASA प्रतिबन्धस्य प्रयोगः कथम् अभवत् ?)

अतः AO = CO तथा BO = DO



आकृतिः 3.30

उदाहरणम् 6 -

आकृतिः 3.31 इत्यस्मिन् HELP एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। प्रदत्तम् अस्ति (औन्नत्यं cm इत्यस्मिन् वर्त्तते) OE = 4तथा HL, PE इत्यस्मात् 5 अधिकः वर्त्तते। OH तर्हि जानन्तु।

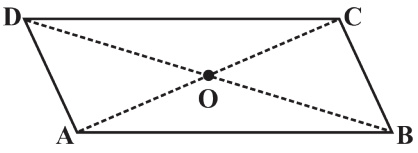
समाधानम् -

यदि - OE = 4 तदा OP = 4 (कथम् ?)

अतः PE = 8, (कथम् ?)

अतएव HL = 8+5 = 13

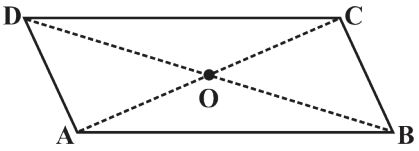
अतः OH = $\frac{1}{2}$ ×13 6.5 cm



आकृतिः 3.31

प्रश्नावली 3.3

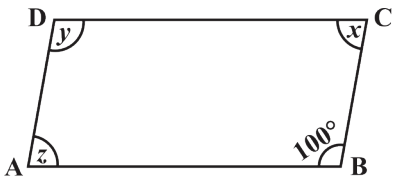
1. ABCD एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। प्रत्येकं कथनं पूर्वपरिभाषया अथ पूर्वकृतप्रयोगगुणेन पूरयन्तु।



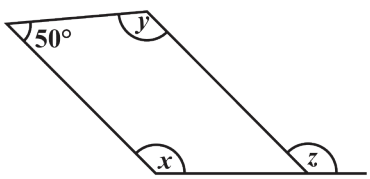
(i) AD =…….. (ii) ∠DCB =……

(iii) OC =…….. (iv) m∠DAB+m∠CDA=……

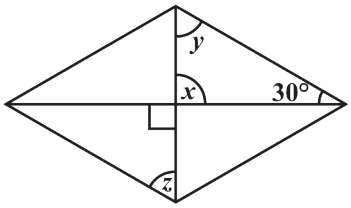
2. निम्न-समान्तर-चतुर्भुजेषु x,y,z इत्येतेषां मानं जानन्तु।



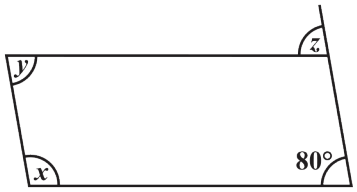
(i)



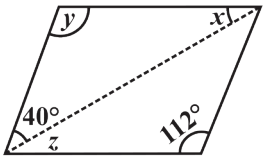
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. किम् एकः चतुर्भुजः ABCD समान्तर-चतुर्भुजः भवितुम् अर्हति यदि

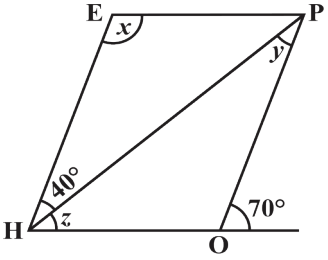
(i) $\angle D+\angle B = 180^\circ$?

(ii) AB=DC=8cm,AD=4cm तथा BC=4.4 cm ?

(iii)$\angle A=70^\circ$ तथा$\angle C=65^\circ$?

4. एकस्य चतुर्भुजस्य सामान्य-आकृतिं रचयन्तु या समान्तर-चतुर्भुजान्तर्गते न आगच्छेत् यस्याः सम्मुख-कोणस्य मापनं समानं स्यात् ।

कस्यापि समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-द्वयस्य कोणस्य अनुपातः 3: 4 अस्ति । समान्तर-चतुर्भुजस्य समस्तकोणस्य मापनं जानन्तु ।

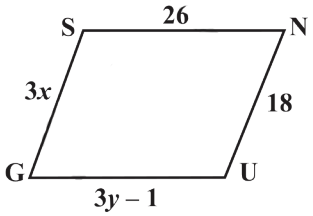


6. कस्यापि समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणद्वयस्य मापनं समानम् अस्ति । समान्तर-चतुर्भुजस्य समस्तकोणस्य मापनं जानन्तु ।

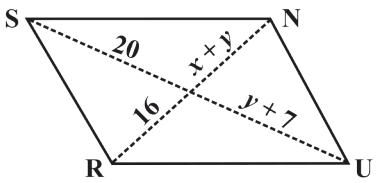
7. संलग्ना-आकृतिः HOPE एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति । x,y तथा z कोणानां मापनं जानन्तु । ज्ञातकरणे कृतप्रयोगगुणं ज्ञापयन्तु ।

8. निम्न-आकृतयः GUNS तथा RUNS समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति । x तथा yजानन्तु । (औन्नत्यं cm इत्यस्मिन् वर्त्तते) ।

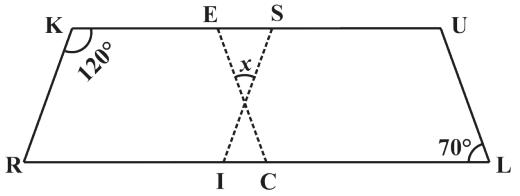
(i)



(ii)

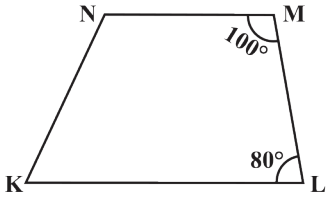


9. दत्तमानायाम् आकृतौ RISK तथा CLUE उभौ समान्तर-चतुर्भुजौ स्तः x इत्यस्य मानं जानन्तु ।

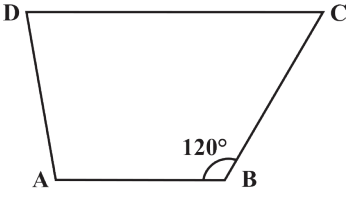


10. ज्ञापयन्तु एषा आकृतिः एका समलम्बा कथम् ? अस्याः कौ द्वौ भुजौ समान्तरौ स्तः । (आकृतिः 3.32)

11. आकृति संख्या 3.33 इत्यस्यां m$\angle C$ जानन्तु यदि $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ अस्ति ।



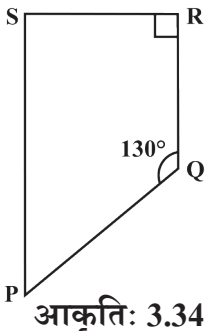
आकृतिः 3.2



आकृतिः 3.33

12. आकृति संख्या 3.34 इत्यस्यां ∠Pतथा∠S इत्यस्य मापं जानन्तु यदि $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ अस्ति।

(यदि भवन्तः m∠R जानन्ति तर्हि किं m∠P इति ज्ञातकरणस्य कश्चित् अन्यः विधिः अस्ति ?)



आकृतिः 3.34

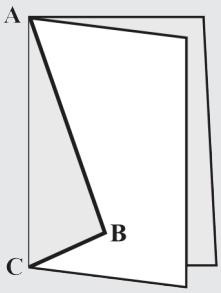
3.5 केचनविशिष्ट-समान्तर-चतुर्भुजः

3.5.1 सम-चतुर्भुजः

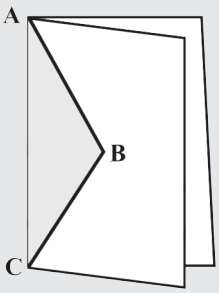
पतङ्गः (यः एकः समान्तर-चतुर्भुजः नास्ति) इत्यस्य विशेष-स्थितिरूपे वयम् एकं सम-चतुर्भुजं प्राप्नुमः यः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अपि अस्ति।

एतत् कुर्वन्तु

भवन्तः पूर्वं कर्गदं कर्त्तयित्वा पतङ्गं निर्मापितवन्तः तं पतङ्गं स्मरन्तु।



कर्तितः पतङ्गः



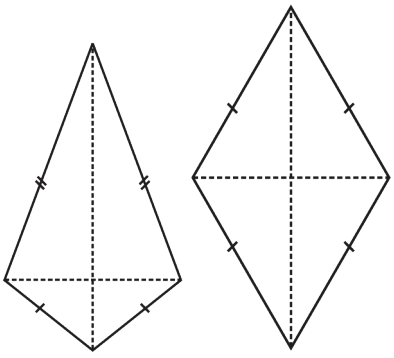
समचतुर्भुजः कर्तितः पतङ्गः

यदा भवन्तःABC इत्यस्य अनुदिशं कर्त्तयित्वा कर्गदम् उद्घाटयन्ति तदा भवन्तः एकं पतङ्गं प्राप्नुवन्ति। अत्र औन्नत्यं AB तथा BC पृथक्-पृथक् आस्ताम्। यदि भवन्तः AB = BC रेखां कारयन्ति तर्हि प्राप्तः पतङ्गः एकः समचतुर्भुजःउच्यते।

ध्यानं ददतु यत् समचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समलम्बकाः भवन्ति परन्तु पतङ्गस्थितौ एवं नास्ति। समचतुर्भुजः एकः ईदृशः चतुर्भुजः अस्ति यस्य सर्वे भुजाः समलम्बकाः भवन्ति।

यतो हि समचतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजाः समानाः भवन्ति अत एव एषः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अपि अस्ति। अतः एकस्मिन् समचतुर्भुजे एकस्य समान्तर-चतुर्भुजस्य तथा पतङ्गस्य सर्वे गुणाः विद्यमानाः भवन्ति। तेषां सूचीनिर्माणस्य प्रयासं कुर्वन्तु। तदा भवन्तः स्व सूची पुस्तके दत्तपरीक्षणसूच्या सह सम्मेल्य पुष्टिं कर्तुं शक्नुवन्ति। एकस्य समचतुर्भुजस्य सर्वोत्तमः गुणः तस्य विकर्णानां भवति।

गुणः - एकस्य समचतुर्भुजस्य विकर्णः परस्परं लम्ब-समद्विभाजकः भवति।

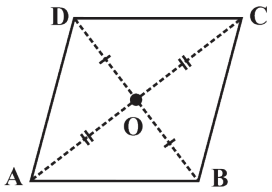

पतङ्गः समचतुर्भुजः

एतत् कुर्वन्तु

समचतुर्भुजस्य एकां प्रतिलिपिं गृह्णन्तु। कर्गदं परावृत्य परीक्षयन्तु यत् किं प्रतिच्छेदी बिन्दुः प्रत्येकविकर्णस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। भवन्तः एकस्य सेट-स्क्वेयर इत्यस्य कोणस्य प्रयोगं कृत्वा परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् ते परस्परं समकोणे प्रतिच्छेदयन्ति।

तर्कपूर्णचरणानाम् उपयोगं कृत्वा अत्र एका आकृतिः प्रदत्ता अस्ति या अस्य गुणस्य पुष्टिं करोतु। ABCD एकः समचतुर्भुजः

अस्ति (आकृतिः 3.35)। अतः एषः एकः समचतुर्भुजः अपि अस्ति।



आकृतिः 3.35

यतो हि विकर्णः परस्परं समद्विभजति।

अतः AO = OC तथा OB = OD

वयम् एतत् प्रदर्शितुम् इच्छामः यत् m∠AOD=m∠COD= 90° अस्ति।

[यतो हि AO = OC (कथम् ?)

AD = CD (कथम् ?)

OD = OD

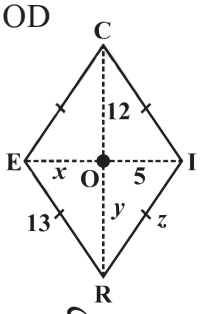
SAS सर्वाङ्गसमता प्रतिबन्धेन एतत् द्रष्टुं शक्यते यत्

Δ AOD ≅ Δ COD

अतः m∠AOD= m∠COD= 90°

उदाहरणम् 7

RICE एकः सम-चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.36)। x,y तथाz इत्यस्य मानं जानन्तु तथा स्व उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।



आकृतिः 3.36

समाधानम् -

x=OE y =OI(विकर्णं समद्विभजति।)=OC(विकर्णं समद्विभजति।)

y=OR =12

z = समचतुर्भुजस्य भुजाः =13(समचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समान मापकाः भवन्ति।)

=5

3.5.2 एकः आयतः

आयतः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति यस्य सर्वे कोणाः समान-मापकाः भवन्ति (आकृतिः 3.37)।

अस्याः परिभाषायाः पूर्णः अर्थः कः ? एतस्य विषये स्वमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु यदि आयतः समकोणिकः स्यात् तर्हि प्रत्येककोणस्य मापनं किं भविष्यति।

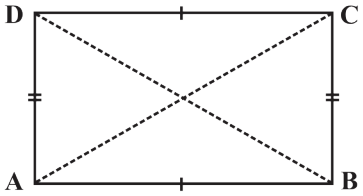
स्वीकुर्वन्तु यत् कोणस्य मापनं x° अस्ति।

तदा 4x°=360° (कथम् ?)

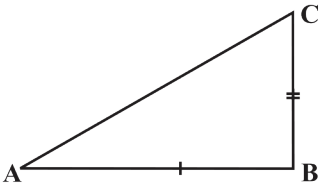
अतएव x°=90°

अतः आयतस्य प्रत्येककोणः समानकोणः भवति। अतः एकः आयतः समान्तर-चतुर्भुजः भवति यस्मिन् प्रत्येक-कोणः समकोणः भवति । एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति एतस्मात् आयतस्य सम्मुख-भुजाः समान-मापकाः भवन्ति तथा विकर्णः परस्परं समद्विभजति। समान्तर-चतुर्भुजे विकर्णः पृथक्-पृथक् लम्बकः भवति। (परीक्षणं कुर्वन्तु) परन्तु आयतस्य (विशेषस्थितौ) विकर्णः समानमापकः भवति।

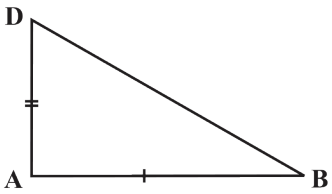
गुणः-आयतस्य विकर्णः समलम्बकः भवति।



आकृतिः 3.38



आकृतिः 3.39



आकृतिः 3.40

अस्य पुष्टिः सरलतया भवितुम् अर्हति। यदि ABCD एकः आयातः (आकृतिः 3.38) वर्त्ततेतर्हि त्रिभुजः ABC तथाABD इति पृथक्-पृथक् (आकृतिः 3.39 तथा आकृतिः 3.40) एतां दृष्टे सति वयं प्राप्नुमः।

Δ AOD $\cong$ Δ COD

यतो हि AB = AB (उभयनिष्ठम्)

BC = AD (कथम् ?)

$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$ (कथम् ?)

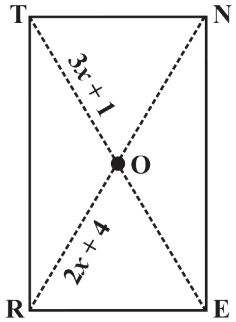
SAS प्रतिबन्धेनसर्वाङ्गसमता भवति।

अतः AC = BC

तथा एकस्मिन् आयते विकर्णः समलम्बकः अस्ति तथापि परस्परं समद्विभजति। (कथम् ?)

उदाहरणम् 8-

RENT एकः आयतः अस्ति (आकृतिः 3.41)।अस्य विकर्णः परस्परं 'O' इत्यस्मिन् प्रतिच्छेदयति x इत्यस्य मानं जानन्तु यदि OR = 2x+4 तथा OT = 3x+1 अस्ति।



आकृतिः 3.41

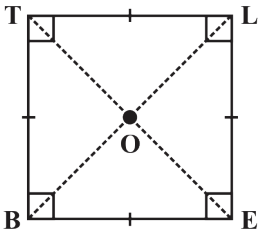
समाधानम् -

$\overline{OT}$ विकर्णः $\overline{TE}$ इत्यस्य अर्धः अस्ति। $\overline{OR}$ विकर्णः $\overline{RN}$ इत्यस्य अर्धः अस्ति। अत्र विकर्णः समलम्बकः अस्ति। (कथम् ?) अतः तेषाम् अर्धभागः अपि परस्परं समानः एव अस्ति।

अतएव 3x+1=2x+4 अर्थात् x=3

3.5.3 वर्गः

वर्गः एकः आयतः भवति यस्य भुजाः समानाः भवन्ति।अस्यार्थः अयमेव यत् एकस्मिन् वर्गे एकस्य आयतस्य सर्वैः गुणैः सह एकः अतिरिक्तोऽपि गुणः भवति यत् अस्य भुजाः समानाः भवन्ति। वर्गस्य विकर्णः आयतस्य विकर्णः इव समानलम्बकः भवति। एकस्मिन् आयते विकर्णनानां परस्परं लम्बायमानकं न आवश्यकंभवति (परीक्षयन्तु) कस्मिन्नपि वर्गे विकर्णः।



(i) परस्परं समद्विभजति। (वर्गः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति)।

(ii) समानं लम्बायमानं भवति। (वर्गः एकः आयतः अस्ति।) तथा

(iii) परस्परं समकोणे समद्विभजति।

इत्थं वयं निम्नलिखितं गुणधर्मं प्राप्नुमः।

गुण:-वर्गस्य विकर्णः परस्परं समकोणे समद्विभजति।

BELT एकः वर्गः अस्ति यस्मिन्

BE = EL = LT = TB

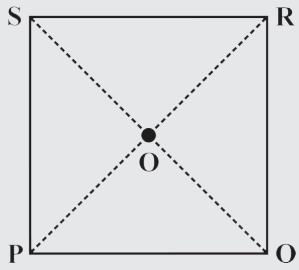
$\angle B, \angle E, \angle L, \angle T$तथा समकोणाः सन्ति। BL = ET तथा BL ⊥ ET

OB = OL तथा OE = OT

एतत् कुर्वन्तु

एकं वर्गाकारं पुस्तं स्वीकुर्मः PQRS गृह्णन्तु (आकृतिः 3.42)। द्वयोः विकर्णयोः अनुदिशं तलं स्थापयन्तु। किं तयोः मध्यबिन्दुः समानः एव अस्ति।

सेट-स्क्वेयर इत्यस्य उपयोगं कृत्वा परीक्षणं कुर्वन्तु किं 'O' इत्यस्मिन् निर्मितः कोणः 90° इत्यस्य अस्ति। एतत् उपरोक्त-गुणधर्मं सिद्धं करोति।



आकृतिः 3.42

तर्क-वितर्कसहायतया वयम् अस्य पुष्टिं कर्त्तुं शक्नुमः। ABCD एकः वर्गः अस्तियस्य विकर्णः परस्परं प्रतिच्छेदयति (आकृतिः 3.43)।

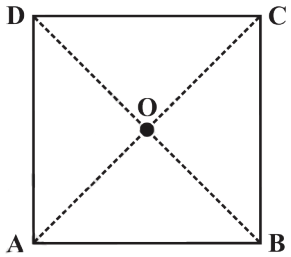
OA = OC (यतो हि वर्गः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति)

SSS सर्वाङ्गसमता प्रतिबन्धेन

Δ AOD $\cong$ Δ COD (कथम् ?)

अतः $m\angle AOD = m\angle COD$

एते कोणाः रैखिक-युग्मं निर्मान्ति अतः प्रत्येक-कोणः समकोणः अस्ति।



आकृतिः 3.43

प्रश्नावली 3.3

1. वदन्तु कथनं सत्यम् अस्ति अथवा असत्यम् -

(a) सर्वे आयताः वर्गाः भवन्ति।

(b) सर्वे सम-चतुर्भुजाः समान्तर-चतुर्भुजाः भवन्ति।

(c) सर्वे वर्गाः सम-चतुर्भुजाः अथ आयताः अपि भवन्ति।

(d) सर्वे वर्गाः समान्तर-चतुर्भुजाः न भवन्ति।

(e) सर्वे पतङ्गाः सम-चतुर्भुजाः भवन्ति।

(f) सर्वे सम-चतुर्भुजाः पतङ्गाः भवन्ति।

(g) सर्वे समान्तर-चतुर्भुजाः समलम्बाः भवन्ति।

(h) सर्वे वर्गाः समलम्बाः भवन्ति।

2. तान् सर्वान् चतुर्भुजान् परिचिन्वन्तु येषु -

(a) चत्वारः भुजाः समानलम्बकाः भवन्तु।

(b) चत्वारः समकोणाः सन्ति।

3. ज्ञापयन्तु कथम् एकः वर्गः -

(i) एकः चतुर्भुजः (ii) एकः समान्तरः चतुर्भुजः (iii) एकः समः चतुर्भुजः

(iv) एकः आयतः अस्ति।

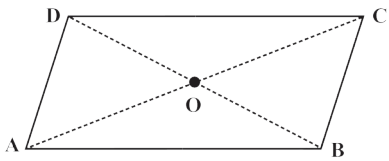
4. एकस्य चतुर्भुजस्य नाम ज्ञापयन्तु यस्य विकर्णः -

(i) परस्परं समद्विभजति (ii) परस्परं लम्बं समद्विभजति (iii) समानाः स्युः

5. ज्ञापयन्तु एकः आयतः उत्तलचतुर्भुजः कथम् अस्ति।

6. ABC एकः समकोणः त्रिभुजः अस्ति तथा 'O' इति समकोणस्य सम्मुखभुजायाः मध्य-बिन्दुः अस्ति। ज्ञापयन्तु कथं 'O' बिन्दुः A, B तथा C इत्यस्मात् समान दूरे स्थितः वर्त्तते।

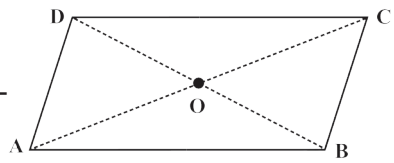
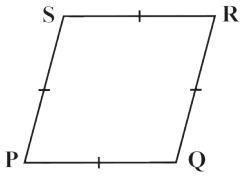
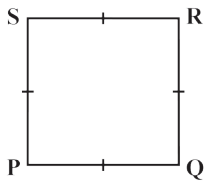
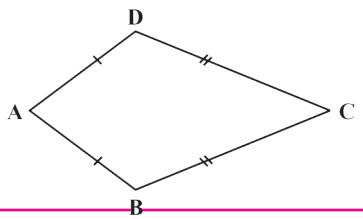
(बिन्दु-चिह्निताङ्तिरिक्त-भुजाःभवतां सहायतायै सन्ति।)



विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

1. एकः राजशिल्पकारः प्रस्तर-पट्टिकां निर्माति। सः एतम् आयताकारं निर्मातुम् इच्छति। कति पृथक्-पृथक् रीत्या सः एतं विश्वासं कर्त्तुम् अर्हति यत् एषः आयताकारः अस्ति।
2. वर्गम् आयतरूपे परिभाषितवान् यस्य सर्वे भुजाः समानाः सन्ति। किं वयम् एतं समचतुर्भुजरूपे परिभाषितुं शक्नुमः यस्य कोणाः समान-मापकाः स्युः ? एतं विचारं स्पष्टयन्तु।
3. किम् एकस्य समलम्बस्य सर्वे कोणाः समानमापकाः भवितुम् अर्हन्ति ? किम् एतस्य सर्वे भुजाः समानमापकाः भवितुम् अर्हन्ति ? वर्णनं कुर्वन्तु।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

चतुर्भुजः	गुणः
समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः यस्मिन् सम्मुख-भुजानां प्रत्येक-युग्मः समान्तरः भवति। 	1. सम्मुख-भुजाः समानाः भवन्ति। 2. सम्मुख-कोणाः समानाः भवन्ति। 3. विकर्णः परस्परं समद्विभजति।
समचतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः यस्य सर्वे भुजाः समानमापकाः भवन्ति। 	1. समान्तर-चतुर्भुजस्य सर्वे गुणाः भवन्ति। 2. विकर्णाः परस्परं लम्बायमानाः भवन्ति ।
आयतः एकः समान्तर-चतुर्भुजः यस्मिन् एकः कोणः समकोणः भवति।	1. समान्तर-चतुर्भुजस्य सर्वे गुणाःभवन्ति। 2. प्रत्येककोणः समकोणः भवति। 3. विकर्णाः समान-मापकाः भवन्ति ।
वर्गः एकः आयतः यस्य सर्वे भुजाः समानाः भवन्ति। 	समान्तरः चतुर्भुजः, समचतुर्भुजः तथा आयतः सर्वेषां गुणः समानः भवति।
पतङ्गः एकः चतुर्भुजः यस्मिन् द्वयोः आसन्न-भुजयोः युग्मः समानः भवति। 	1. विकर्णाः परस्परं लम्बायमानाः भवन्ति। 2. एकः विकर्णः अपरं विकर्णं समद्विभजति। 3. आकृतौ $m\angle B = m\angle D$ परन्तु $m\angle A \neq m\angle C$

अध्यायः

4

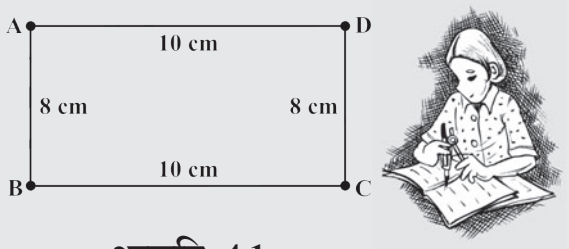
प्रायोगिक-ज्यामितिः

4.1 भूमिका

भवन्तः प्रायः 7 कक्ष्यायां त्रिभुजानां रचनां कर्तुं शिक्षितवन्तः अस्माकं कृते एकाद्वितीयत्रिभुजस्य रचनायै त्रयाणां मापानाम् (भुजानां कोणानाञ्च) आवश्यकता भवति। यतो हि एकस्य त्रिभुजस्य रचनायै माप-त्रयं पर्याप्तम्। एकः स्वाभाविकः प्रश्नः आयाति यत् किम् एकाद्वितीय-चतुर्भुजीय-बन्धाकृतेः या चतुर्भुजरूपेण ख्याता अस्ति तस्याः रचनार्थं मापचतुष्टयं पर्याप्तं भविष्यति।

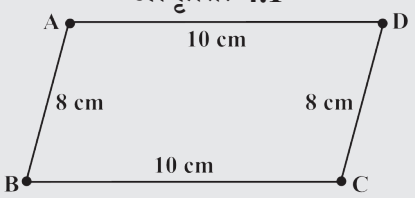
एतत् कुर्वन्तु

सम-लम्बकं (स्वीकुर्वन्तु 10 cm) तिल्लिकानां एकं युग्मं गृह्णन्तु अधुना पुनः सम-लम्बकं (स्वीकुर्वन्तु 8 cm) अथ तिल्लिकानां एकं युग्मं गृह्णन्तु। एतं परस्परं इत्थं योजयन्तु यस्मात् 10 cm लम्बकस्य अथ 8 cm वैशाल्यस्य एकस्य आयतस्य प्राप्तिः भवेत्। अस्य आयतस्य निर्माणं चतुर्णां मापानाम् उपयोगेन कृतम् अस्ति। (आकृतिः 4.1)



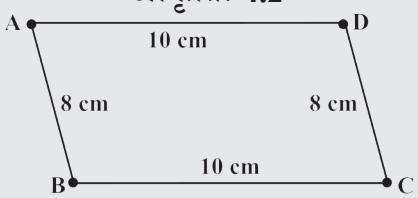
आकृतिः 4.1

अधुना आयतस्य वैशाल्य-अनुदिशंभारं दद्युः किं नवप्राप्त-आकृतिः इदानीम् अपि एक-आयतरूपा अस्ति (आकृतिः 4.2) ? ध्यानं ददतु यत् इदानीम् आयतः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अभवत्। किं भवन्तः तिल्लिकानाम् औन्नत्यं परिवर्तितवन्तः ? न भुजानां मापकं तादृगेव तिष्ठति।



आकृतिः 4.2

नव-प्राप्त-आकृतिम् अन्यदिशि भारं दद्युः। भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? भवन्तः पुनः एकं समान्तर-चतुर्भुजं प्राप्नुवन्ति यः चतुर्भुजः सर्वथा पृथक् अस्ति (आकृतिः 4.3)। अधुना अपि मापचतुष्टयं तावदेव भवति।

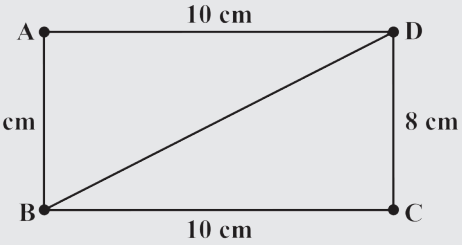


आकृतिः 4.3

एतत् प्रदर्शयति यत् चतुर्भुजस्य चतुर्भिः मापैः एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य प्राप्तिः भवितुम् न अर्हति। किं पञ्च-मापेषु एकम् अद्वितीय-चतुर्भुजं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

एतत् कुर्वन्तु

आगच्छन्तु अस्मिन् क्रियाकलापे पुनः विचारं कुर्मः । भवन्तः प्रत्येकं 10 cm लम्बकस्य तिल्लिकाद्वयेन अथ प्रत्येकं 8 cm लम्बकस्य तिल्लिकाद्वयेन एकस्य आयतस्य रचनां कृतवन्तः। इदानीं BD इत्यस्य लम्बाम् अपरां तिल्लिकां BD इत्यस्य अनुदिशं बध्नीयुः (आकृतिः 4.4)। यदि भवन्तः अधुना वैशाल्य पक्षे भारं ददति तर्हि किम् आकृतौ परिवर्त्तनं भवति? न, आकृतेः उद्घाटनं विना एतत् परिवर्त्तनं न सम्भवति।



आकृतिः 4.4

पञ्चम-तिल्लिकानां प्रवेशनेन आयतः अद्वितीयरूपे स्थिरः अभवत् अर्थात् कश्चित् अन्यः चतुर्भुजः (दत्तानां भुजानां लम्बकं समानम्) इदानीं सम्भवः नास्ति।

अतः वयं दृष्टवन्तः यत् पञ्चषु मापेषु वयम् एकम् अद्वितीय-चतुर्भुजं प्राप्नुमः ।

परन्तु किम् एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचनार्थं कश्चित् अपि पञ्च-मापः (भुजानां कोणानाञ्च) पर्याप्तः अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

अरशदस्य पार्श्वे एकः चतुर्भुजः ABCD इत्यस्य पञ्च मापाः सन्ति। एते मापाः AB=5cm, ∠A=50° AC=4cm,BD=5cm तथा AD=6cm अस्ति। किं सः अनेन मापेन एकम् अद्वितीय-चतुर्भुजं निर्मापितुं शक्नोति ? स्वकीय उत्तरस्य कारणं ददतु।

4.2 एकस्य चतुर्भुजस्य रचना

इदानीं वयं शिक्षामः यत् दत्तेषु निम्नलिखितमापेषु एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचनां कथं भवितुम् अर्हति।

- यदा चत्वारः भुजाः तथा एकः विकर्णश्च प्रदत्तः अस्ति।
- यदा द्वौ विकर्णौ तथा त्रयः भुजाश्च प्रदत्ताः सन्ति।
- यदा द्वौ आसन्न-भुजौ तथा त्रयः कोणाः प्रदत्ताः सन्ति।
- यदा त्रयः भुजाः तथा तेषां मध्ये कोणद्वयं प्रदत्तम् अस्ति।
- यदा अन्य-विशिष्ट-गुणाः ज्ञाताः भवेयुः।

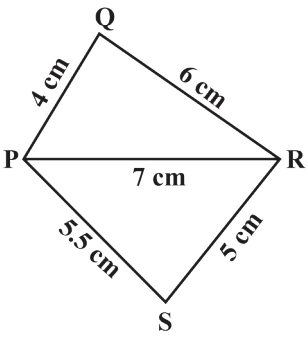
आगच्छन्तु एकैकश-रचनां गृह्णामः -

4.2.1 एकस्य चतुर्भुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदा चतुर्णां भुजानां तथा एकस्य विकर्णस्य लम्बकं प्रदत्तं स्यात् -

वयम् एतां रचनां एकेन उदाहरणेन ज्ञापयामः -

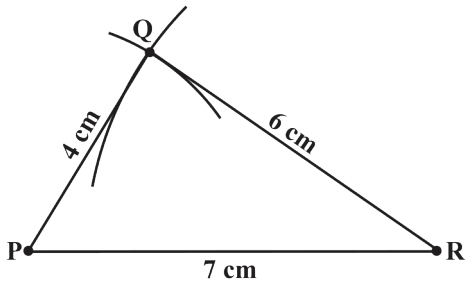
उदाहरणम् - 1 एकस्य चतुर्भुजस्य PQRS इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यस्मिन् PQ=4cm, QR=6cm,6cm, RS=5cm, PS=5.5cm तथा PR=7cm स्यात्।

समाधानम् - एका सामान्या आकृतिः चतुर्भुज-अवबोधने अस्माकं साहाय्यं करिष्यति। वयं प्रथमं सामान्याम् आकृतिं रचयामः तथा मापं चिह्नितं करोमि (आकृतिः 4.5)।

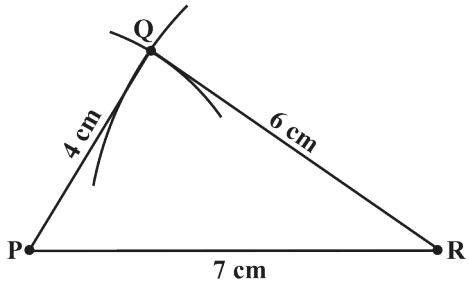


आकृतिः 4.5

चरणम् 1 सामान्य-आकृत्या बहु सरलतया द्रष्टुं शक्यते यत् SSS रचना-निकषेन Δ PQR इत्यस्य रचना भवितुम् अर्हति । Δ PQR इति रचयन्तु (आकृतिः 4.6)।



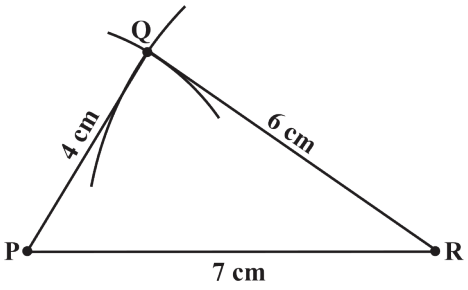
आकृतिः 4.6

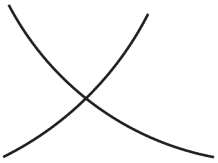


चरणम् 2 इदानीम् अस्माभिः चतुर्थबिन्दुः 'O' इति ज्ञातव्यः अस्ति। एषः बिन्दुः S,PR इत्यस्मिन् सन्दर्भे बिन्दुः Q इत्यस्य विरुद्धे भविष्यति । एतदर्थम् अस्माकं पार्श्वे मापद्वयं वर्त्तते । बिन्दुः P इत्यतःबिन्दुः S.5.5 cm इत्यस्य दूरे स्थितः वर्त्तते । अतः P इति केन्द्रं मत्वा 5.5 cmत्रिज्यायाः एकं चापम् इति रचयन्तु । (बिन्दुः S अस्मिन् चाप इत्यस्मिन् कुत्रापि स्थितः भविष्यति ।) (आकृतिः 4.7)

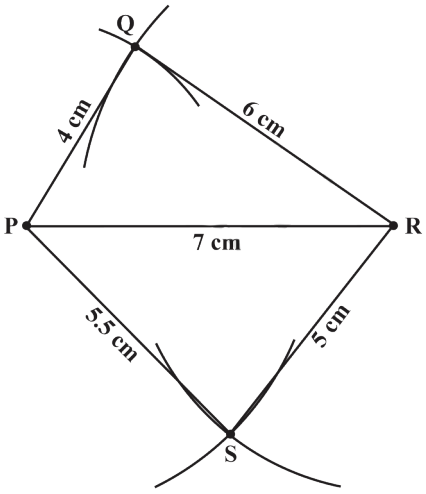
आकृतिः 4.7

चरणम् 3 R बिन्दुतः S इति बिन्दुः 5 cm दूरे अस्ति । अतः R इति केन्द्रं मत्वा 5 cm त्रिज्यां नीत्वा एकं चापम् इति रचयन्तु । (बिन्दुः S अस्मिन् चाप इत्यस्मिन् कुत्रापि स्थितः भविष्यति ।) (आकृतिः 4.8)





आकृतिः 4.8



आकृतिः 4.9

चरणम् 4 S इति बिन्दुः उभयोः चापयोः स्थितः भवेत्। अतः एषः उभयोः चापयोः प्रतिच्छेदः बिन्दुः अस्ति। एतं बिन्दुं S इत्यनेन अङ्कितं कुर्वन्तु तथा PQRS इति पूरयन्तु । अर्थात् PS तथा RS इति योजयन्तु । PQRS इतिअभीष्टः चतुर्भुजः अस्ति। (आकृतिः 4.9)

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

(i) वयं दृष्टवन्तः यत् एकस्य चतुर्भुजस्य पञ्चमापैः एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचना भवितुम् अर्हति। किं भवन्तः विचारयन्ति यत् चतुर्भुजस्य कैश्चिदपि पञ्चमापैः एतादृशी रचना भवितुम् अर्हति ?

(ii) किं भवन्तः एकस्य समान्तर-चतुर्भुजस्य BATS इत्यस्य रचनां कर्त्तुं शक्नुवन्ति यस्मिन् BA=5cm, AT=6 cm,तथाAS=6.5 cmभवेत् ? कथम् ?

(iii) किं भवन्तः एकस्य सम-चतुर्भुजस्य ZEAL इत्यस्य रचनां कर्त्तुं शक्नुवन्ति यस्मिन् ZE=3.5cm,विकर्णःEL=5cm अस्ति ? कथम् ?

(iv) एकः विद्यार्थी एकस्य चतुर्भुजस्य PLAY इत्यस्य रचनां कर्त्तुं प्रयासं करोति यस्मिन् PL=3cm, LA=4 cm, AY=4.5 cm, PY=2cm,तथा LY=6cm अस्ति परन्तु सः अस्य रचनां कर्त्तुं न अपारयत्। कारणं ज्ञापयन्तु ?

[**सङ्केतः-** एकसामान्य-आकृति-माध्यमेन चर्चां कुर्वन्तु]

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित-चतुर्भुजं रचयन्तु -

(i) चतुर्भुजः ABCD यस्मिन्
AB=4.5cm
BC=5.5cm
CD=4cm
AD=6cm
AC=7cmअस्ति।

(ii) चतुर्भुजः JUMP यस्मिन्
JU=3.5cm
UM=4cm
MP=5cm
PJ=4.5cm
PU=6.5cmअस्ति।

(iii) समान्तर-चतुर्भुजः MORE यस्मिन्
OR=6cm
EO=7.5cm
EO=7.5cmअस्ति।

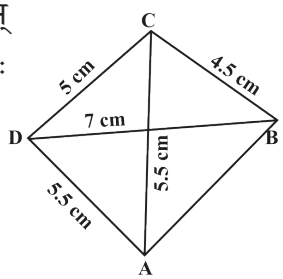
(iv) समान्तर-चतुर्भुजः BEST यस्मिन्
BE=4.5cmतथा
ET=6cmअस्ति।

4.2.2 एकस्य चतुर्भुजस्य रचना भवेत् यदा द्वयोः विकर्णयोः अथ त्रयाणां भुजानां लम्बकं प्रदत्तं स्यात् -

यदा चतुर्भुजस्य चत्वारः भुजाः एकः विकर्णश्च दत्तः अस्ति तदा वयं पूर्वम् एव दत्तमापैः एकस्य त्रिभुजस्य रचनां कृतवन्तः तथा तदुपरान्तं चतुर्थबिन्दुं ज्ञानार्थं प्रयत्नं कृतवन्तः। अस्यैव विधेः प्रयोगम् अत्र कुर्मः।

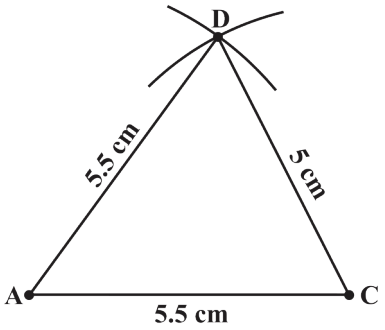
उदाहरणम् - 2 एकस्य चतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यस्मिन् BC=4.5cm,AD=5.5cm,CD=5cm, विकर्णः AC=5.5cm तथाविकर्णः BD=7cm अस्ति।

समाधानम् - अत्र चतुर्भुजः ABCD इत्यस्य सामान्य-आकृतिः प्रदत्ता अस्ति (आकृतिः 4.10) अस्याः सामान्य-आकृतेः अध्ययनं कृत्वा वयं सरलतया द्रष्टुं शक्नुमः यत् सर्वप्रथमं इत्यस्य रचना सम्भवा अस्ति (कथम् ?)।

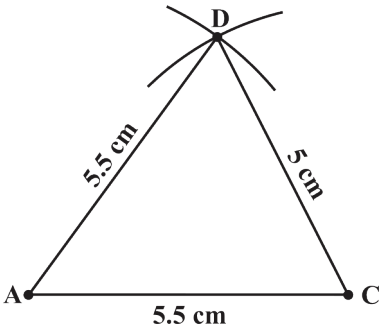


आकृतिः 4.10

चरणम् 1 SSS निकषस्य उपयोगं कृत्वा Δ ACD इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु (आकृतिः 4.11) (इदानीम् अस्माकं कृते B बिन्दोः अभिज्ञानस्य आवश्यकता अस्तियः बिन्दुः C इत्यतः 4.5cm तथा बिन्दुः D इत्यतः 7cm दूरे स्थितः अस्ति)।

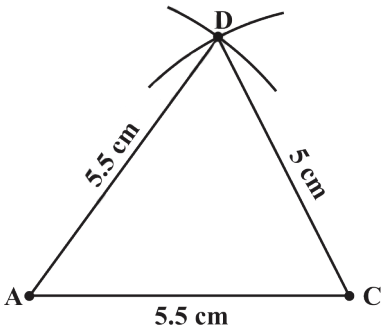


आकृतिः 4.11

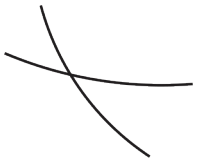


चरणम् 2 D इति केन्द्रं मत्वा 7 cm त्रिज्यायाः एकं चापम् इति रचयतु। (बिन्दुः B अस्मिन् चापे कुत्र स्थितः भविष्यति।) (आकृतिः 4.12)

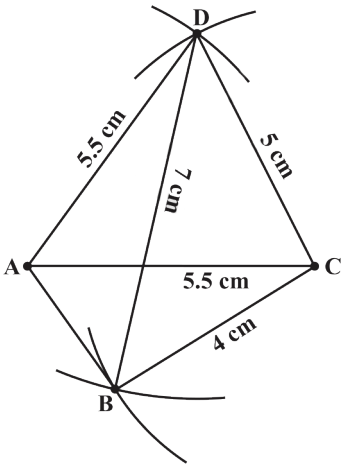
आकृतिः 4.12



चरणम् 3 C इति केन्द्रं मत्वा 4.5 cm त्रिज्यायाः एकं चापम् इति रचयन्तु। (बिन्दुः B अस्मिन् चापे कुत्र स्थितः भविष्यति।) (आकृतिः 4.13)



आकृतिः 4.13



आकृतिः 4.14

चरणम् 4 यतो हि बिन्दुः B अनयोः चापयोः स्थितः अस्ति। अतः बिन्दुः B इतिअनयोः चापयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुः अस्ति । बिन्दुः B इति अङ्कितं करोतु तथा ABCD इति पूरयतु। ABCD एकः अभीष्ट-चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 4.14)।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

1. उपर्युक्त-उदाहरणे किं वयं पूर्वं Δ ABD इति विलिख्य तदनन्तरं चतुर्थबिन्दुं C इति ज्ञात्वा चतुर्भुजस्य रचनां कर्त्तुं शक्नुमः ?
2. किं भवन्तः एकस्य चतुर्भुजस्य PQRS इत्यस्य रचनां कर्त्तुं शक्नुवन्ति यस्मिन् PQ=3cm, RS=3 cm, PS=7.5 cm, PR=8cm,तथा SQ=4cm अस्ति ? स्व उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित-चतुर्भुजं रचयन्तु -

(i) चतुर्भुजः LIFT यस्मिन्

LI=4cm
IF=3cm
TL=2.5cm
LF=4.5cm
IT=4cm अस्ति।

(ii) चतुर्भुजः GOLD यस्मिन्

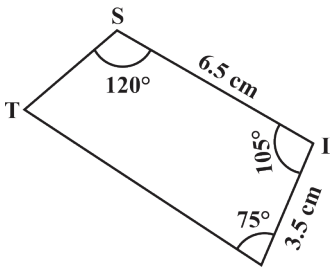
OL=7.5cm
GL=6cm
GD=6cm
LD=5cm
OD=10cm अस्ति।

(iii) समलम्बःBEND यस्मिन्

BN=5.6cm
DE=6.5cmअस्ति।

4.2.2 एकस्य चतुर्भुजस्य रचना भवेत् यदा द्वयोः आसन्नभुजयोः अथ त्रयाणां कोणानां मापकं प्रदत्तं स्यात् -

वयं पूर्वम् इव त्रिभुजस्य रचनातः प्रारम्भं कुर्मः तदुपरान्तं चतुर्भुजं पूरयितुं चतुर्थबिन्दोः ज्ञानार्थं प्रयत्नं कुर्मः।

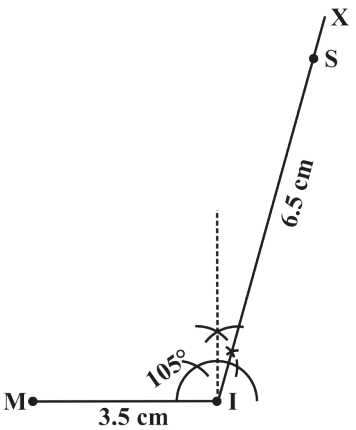


आकृतिः 4.15

उदाहरणम् -3 एकस्य चतुर्भुजस्य MISTइत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यस्मिन् MI=3.5cm,IS=6.5cm,∠M=75°,∠I=105° तथा∠S=120° अस्ति।

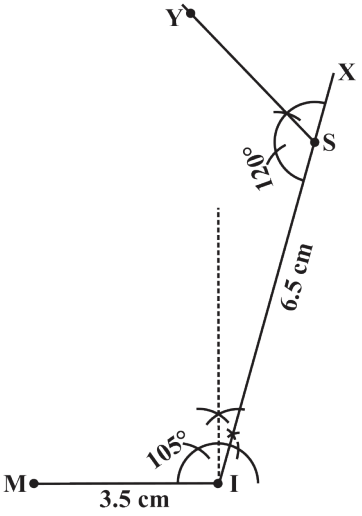
समाधानम् - अत्र एका सामान्य-आकृतिः प्रदत्ता अस्ति या अस्माकं रचनायाः चरणं निश्चितुं अस्माकं सहायता भविष्यति। वयं भिन्न-चरणानां कृते केवलं सङ्केतं दास्यामः (आकृतिः 4.15)।

चरणम् 1 भवन्तः बिन्दुं कथं ज्ञास्यन्ति ? भवन्तः आधारार्थं कस्य चयनं कुर्वन्ति तथा भवतां प्रथमः चरणः किं भविष्यति (आकृतिः 4.16)।

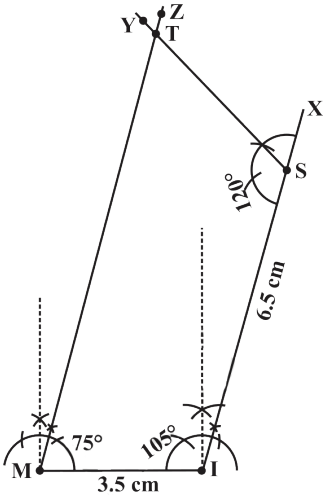


आकृतिः 4.16

चरणम् 2 बिन्दुः S इत्यस्मिन् ∠ISY=120°
निर्मापयन्तु (आकृतिः 4.17)।



आकृतिः 4.17



आकृतिः 4.18

चरणम् 3 बिन्दुः M इत्यस्मिन् ∠IMZ=75° निर्मापयन्तु SY तथा MZ कुत्र प्रतिच्छेदं करिष्यतः ? तं बिन्दुं T इति माध्यमेन अङ्कयन्तु। वयम् अभीष्ट-चतुर्भुजं MIST इति प्राप्नुमः (आकृतिः 4.18)।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

1. यदि वयं M इत्यस्मिन् 75° मापस्य स्थाने 100° इति मापः दत्तः अस्ति तर्हि किं उपरोक्ते चतुर्भुजे MIST इत्यस्य रचनां कर्तुं शक्नुमः।
2. किं भवन्तः एकस्य चतुर्भुजस्य PLAN इत्यस्य रचनां कर्त्तुं शक्नुवन्ति यदि PL=6cm, LA=9.5 cm, ∠P=75° ∠L=150° तथा∠A=140° अस्ति ?
   (**सङ्केतः** - कोण-योगफलस्य गुणं स्मरन्तु।)
3. एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे द्वयोः आसन्न-भुजयोः औन्नत्यं दत्तम् अस्ति। किं रचनाकरणार्थम् इदानीमपि कोणमापानाम् आवश्यकता अस्ति यथा उपरोक्त-उदाहरणे प्रदत्तम् अस्ति।

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित-चतुर्भुजं रचयन्तु -

(i) चतुर्भुजः MORE यस्मिन्
MO=6cm
OR=4.5cm
∠M=60°
∠O=105°
∠R=105° अस्ति।

(ii) चतुर्भुजः PLAN यस्मिन्
PL=4cm
LA=6.5cm
∠P=90°
∠A=110°
∠N=85° अस्ति।

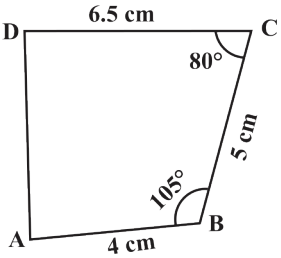
(ii) समान्तर-चतुर्भुजः HEAR यस्मिन्
HE=5cm
EA=6cm ∠R=85° अस्ति।

(iv) आयतः OKAY यस्मिन्
OK=7cm
KA=5cmअस्ति।

4.2.4 एकस्य चतुर्भुजस्य रचना भवेत् यदा त्रयः भुजाः अथ तस्य मध्ये कोणद्वयस्य मापनं प्रदत्तं स्यात् -

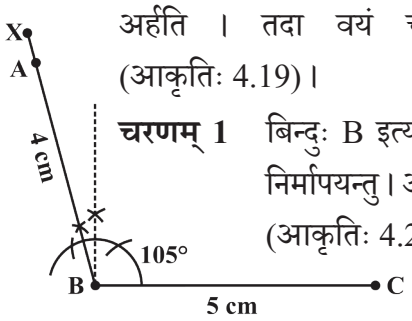
एवं प्रकारेण चतुर्भुजान्तर्गते यदा भवन्तः एकां सामान्याम् आकृतिंनिर्मान्ति तर्हि तस्याः मध्ये स्थितं कोणं विशेषरूपेण पश्यन्तु।

उदाहरणम् - 4 एकस्य चतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यत्र AB=4cm, BC=5cm, CD=6.5cm, ∠B=105° तथा ∠C=80° अस्ति।



आकृतिः 4.19

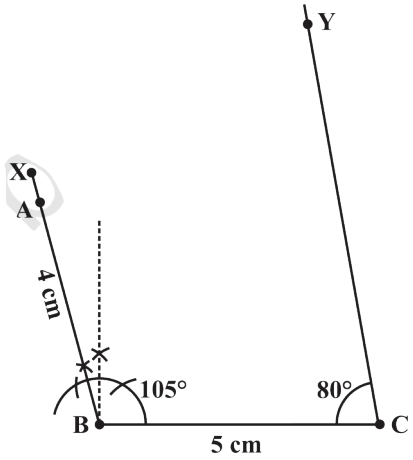
समाधानम् - साधारणतया वयम् एकां सामान्याम् आकृतिंरचयामः यस्याः वयम् एतत् ज्ञातुं शक्नुमः यत् रचनायाः प्रारम्भः कथं भवितुम् अर्हति । तदा वयं चतुर्णां बिन्दूनां ज्ञानार्थं योजनां कर्त्तुं शक्नुमः (आकृतिः 4.19)।



आकृतिः 4.20

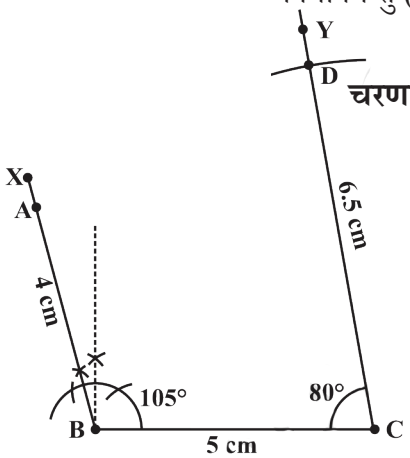
चरणम् 1 बिन्दुः B इत्यस्मिन् BC=5cm नीत्वा प्रारभन्तु। BX इत्यस्य अनुदिशं 105° इत्यस्य कोणं निर्मापयन्तु। अस्मिन् 4cm दूरे बिन्दौ A इति स्थापयन्तु इदानीं वयं B, C तथा A बिन्दुं प्राप्तवन्तः (आकृतिः 4.20)।

चरणम् 2 चतुर्थ बिन्दुः D, CY इत्यस्मिन्कुत्रापि स्थितः अस्ति यः भुजः BC इत्यनेन सह 80° कोणं निर्मापयति । BC इत्यस्मिन् स्थितः बिन्दुः C इत्यस्मिन् ∠BCY=80° निर्मापयन्तु (आकृतिः 4.21)।



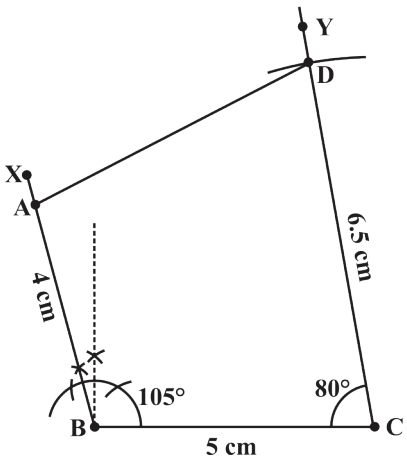
आकृतिः 4.21

चरणम् 3 बिन्दुः D, CY इत्यस्मिन् 6.5cm दूरे स्थितः अस्ति C इति केन्द्रं मत्वा तथा 6.5cm त्रिज्यां गृहीत्वा एकं चापं रचयन्तु। एषः CY बिन्दुः D इत्यस्मिन् प्रतिच्छेदयति (आकृतिः 4.22)।



आकृतिः 4.22

चरणम् 4 चतुर्भुजः ABCD इति पूरयन्तु ABCD अभीष्टः चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 4.23)।



आकृतिः 4.23

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

1. उपरोक्त-उदाहरणे वयं सर्वप्रथमं BC इति रचितवन्तः। अस्य स्थाने अपरः अन्यः प्रारम्भः बिन्दुः कः भवितुम् अर्हति।
2. वयम् इदानीं पर्यन्तं चतुर्भुजानां रचनार्थं केषाञ्चन मापानां प्रयोगं कृतवन्तः किम् एकस्य चतुर्भुजस्य रचनार्थं पञ्चमापानां पृथक्-पृथक् समुच्चयः (इदानीन्तनानां दृष्टमापानाम् अतिरिक्तम्) भवितुम् अर्हति।

निम्नलिखित-समस्याः प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं भवतां साहाय्यं करिष्यन्ति।

(i) चतुर्भुजः ABCD यस्मिन्AB=5cm,BC=5.5cm,CD=4cm,AD=6cm तथा ∠B=80° अस्ति।

(ii) चतुर्भुजः PQRS यस्मिन्PQ=4.5cm,∠P=70°,∠Q=100°,∠R=80°,∠S=110° अस्ति।

भवन्तः स्वयं केषाञ्चित् उदाहरणानां रचनां कुर्वन्तु तथा एकस्य चतुर्भुजस्य रचनार्थं गणनानां पर्याप्तताम् / अपर्याप्ततां ज्ञापयन्तु।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखित-चतुर्भुजं रचयन्तु -

(i) चतुर्भुजः DEAR यस्मिन्
DE=4cm
EA=5cm
AR=4.5cm
∠E=60° तथा ∠A=90° अस्ति।

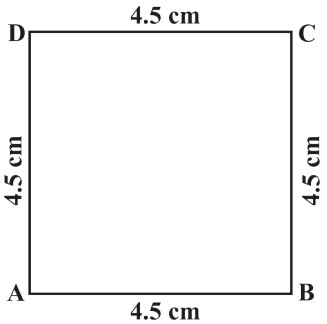
(ii) चतुर्भुजः TRUE यस्मिन्
TR=3.5cm
RU=3.5cm
UE=4cm
∠R=75° तथा ∠U=120° अस्ति।

4.3 कांश्चन विशिष्टाः स्थितयः -

एकस्य चतुर्भुजस्य रचनार्थं केषाञ्चन मापानां प्रयोगं कृतवन्तः किं कस्यापि ईदृशस्य चतुर्भुजस्य रचना भवितुम् अर्हति येषां मापानां संख्या एतेषां मापानां संख्यातः न्यूना भवेत् ? निम्नलिखितम् उदाहरणम् एतादृशीं विशिष्टां स्थितिं परीक्षयति।

उदाहरणम् -5 4.5 cm भुजीय वर्गं निर्मापयन्तु।

समाधानम्- सर्वप्रथमम् एवं प्रतीयते यत् केवलम् एकः एव मापः दत्तः। वस्तुतः अस्माकं पार्श्वे इतोऽपि बहुविध-ज्ञानम् अस्ति। यतो हि इयम् आकृतिः एकः विशेषः चतुर्भुजः अस्ति यस्याः नाम वर्गः अस्ति। इदानीं वयं जानीमः यत् अस्याः प्रत्येक-कोणः समकोणः अस्ति। (सामान्याम् आकृतिं पश्यन्तु) (आकृतिः 4.24)

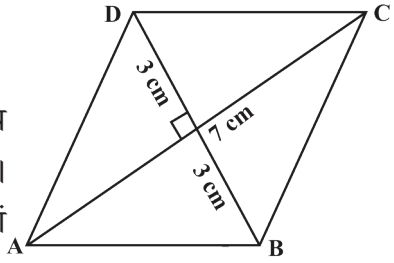


आकृतिः 4.24

एतत् SAS निकषस्य उपयोगेन Δ ABC रचनायां वयं सहायतां प्राप्नुमः। तदुपरान्तं बिन्दुः D इत्यस्य ज्ञानंबहु सहजतया प्राप्तुं शक्नुमः। दत्तैः मापैः इदानीं भवन्तः स्वयम् एकस्य वर्गस्य रचनां कुर्वन्तु।

उदाहरणम् -6 किम् एकस्य सम-चतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य रचना भवितुम् अर्हति यत्र AC=6 cm तथा BD=7 cm भवेत् ? स्व उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

समाधानम् - सम-चतुर्भुजस्य केवलं मापद्वयं (विकर्णः) प्रदत्तम् अस्ति यतो हि एषः एकः सम-चतुर्भुजः अस्ति अस्य गुणेन वयम् इतोऽपि सहायतां प्राप्तुं शक्नुमः । सम-चतुर्भुजस्य विकर्णः परस्परं समद्विभजति ।

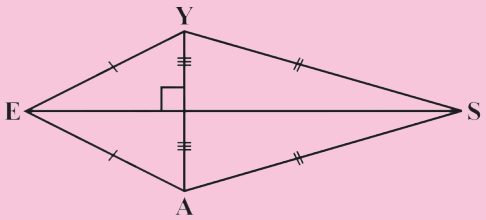


आकृतिः 4.25

अतः सर्वप्रथमं AC=7cm रचयन्तु तथा तदुपरान्तम् अस्य लम्बसमद्विभाजकस्य रचनां कुर्वन्तु। उभौ परस्परं O इत्यस्मिन् प्रतिच्छेदयति। रचितः समद्विभाजकः बिन्दुः O इत्यनेन उभय-पक्षतः लम्बीय त्रिज्यां नीत्वा कर्त्तयतु । इदानीं भवन्तः B तथा D इतिबिन्दुं प्राप्नुवन्ति । उपरोक्त-विध्यनुसारेण साम्प्रतम् एकं सम-चतुर्भुजं रचयन्तु (आकृतिः 4.25) ।

प्रयासं करोतु

1. भवन्तः एकस्य आयतस्य PQRS इत्यस्य रचनां कथं करिष्यन्ति यदि भवन्तः केवलं PQ तथा QR इत्यस्य औन्नत्यं जानन्ति ?
2. एकं पतङ्गं EASY इति रचयन्तु यदि AY=8 cm, EY=4 cm तथा SY=6 cm अस्ति (आकृतिः 4.26) । रचना क्रमे भवन्तः पतङ्गस्य केषां गुणानां प्रयोगं कृतवन्तः ?



आकृतिः 4.26

प्रश्नावली 4.5

निम्नलिखितस्य रचनां कुर्वन्तु -

1. एकः वर्गः READ यस्मिन् RE=5.1 cm अस्ति ।
2. एकः सम-चतुर्भजः यस्य विकर्णस्य औन्नत्यं 5.2cm तथा 6.4cm अस्ति ।
3. एकः आयतः यस्य आसन्न-भुजानाम् औन्नत्यं 5 cm तथा 4 cm अस्ति ।
4. एकः समान्तरः चतुर्भुजः OKAY यत्र OK=5.2cm तथा KA=4.2cm अस्ति । किम् एषः अद्वितीयः अस्ति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. पञ्च-मापैः एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य प्राप्तिः भवितुम् अर्हति ।
2. एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचना भवितुम् अर्हति यदि तस्य चतुर्भुजानाम् औन्नत्यं तथा एकः विकीर्णः प्रदत्तः अस्ति ।
3. एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचना भवितुम् अर्हति यदि तस्य द्वौ विकर्णौ त्रयः भुजाश्च प्रदत्ताः स्युः ।
4. एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्य रचना भवितुम् अर्हति यदि तस्य द्वयोः भुजयोः अथ त्रयाणां भुजानां मापः ज्ञातः भवेत् ।
5. एकस्य अद्वितीय-चतुर्भुजस्यरचना भवितुम् अर्हति यदि तस्य भुजाः तथा मध्यस्थकोणद्वयं प्रदत्तं स्यात् ।

अध्यायः 5

गणनानां प्रबन्धनम्

5.1 सूचनानाम् अन्वेषणे

भवतां दैनिक-जीवने भवतां सम्मुखं निम्नलिखित-प्रकारकाः सूचनाः आगताः भविष्यन्ति।

(a) गतायां 10 निकषक्रिकेटक्रीडायां क्रीडकेन आहत्य अर्जिताः धावनाङ्काः।

(b) गतायां 10 एकदिवसीय-अन्ताराष्ट्रियक्रिकेटक्रीडायां (ODI) एकेन कन्दुकक्षेपकेन प्रतिद्वन्दिनः विजिताः।

(c) भवतां कक्ष्यायाः विद्यार्थिभिः घटकपरीक्षायां प्राप्ताः अङ्काः।

(d) भवतां मित्रेषु प्रत्येकेन पठितकथा-पुस्तकानां संख्या-इत्यादिः।

एतासु सर्वासु स्थितिषु एकत्रित-सूचना गणना भवति। गणना प्रायः एतादृश्याः स्थितेः सन्दर्भे एकत्रिता भवति यस्याः अध्ययनं वयं कर्तुम् इच्छामः। उदाहरणार्थम् एकायाः अध्यापिकायाः रुचिः स्वकक्ष्यायाः सामान्य-औन्नत्यं ज्ञातुं भवितुम् अर्हति। एतत् ज्ञातुं सा स्वकक्ष्यायाः सर्वेषां विद्यार्थिनां औन्नत्यं लेखिष्यति एतां गणनां क्रमबद्धरूपेण संगठितं करिष्यति तथा तदनुसारं तस्याः गणनायाः व्याख्यां करिष्यति।

कदाचित् गणनां स्पष्टयितुं यत् सा किं निरूपयति आलेखीयरूपेण तां निरुपितुं भवति। किं भवन्तः तान् विविध-प्रकारकान् आलेखान् स्मरन्ति यान् वयं गत-कक्ष्यायां पठितवन्तः ?

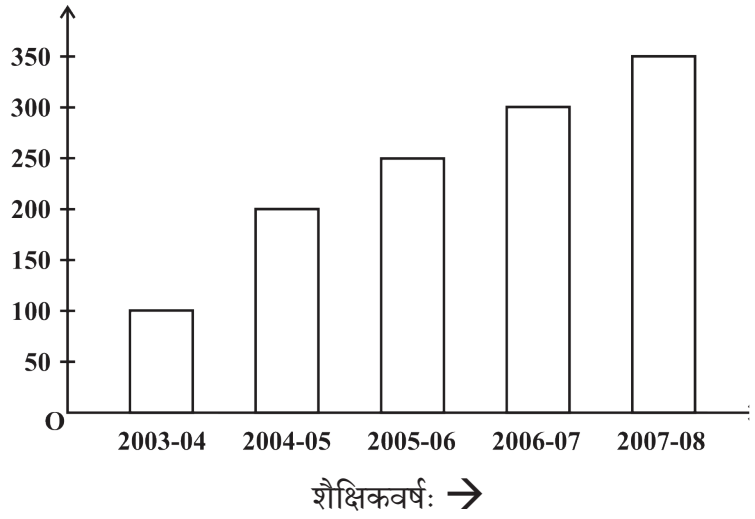
1. एकः चित्रालेखः - सङ्केतानां गणं कृत्वा गणनानां चित्रीय-निरूपणम्।

= 100 कारयानं ← एकः सङ्केतः 100 कारयानं प्रदर्शयति।	
जुलाई	= 250 100 कारयानं $\frac{1}{2}$ रूपेणप्रदर्शयति।
अगस्तः	= 300
सितम्बरः	= ?

(i) जुलाई मासे कति कारयानानाम् उत्पादनम् अभवत् ?

(ii) कस्मिन् मासे कारयानानाम् अधिकतमम् उत्पादनम् अभवत् ?

2. **एकः दण्डालेखः** - एकं वैशाल्यसङ्केतानां गणं कृत्वा गणनानां चित्रीय-निरूपणम् ।



दण्डस्य औन्नत्यं प्रत्येक-श्रेण्याः मात्रां प्रदर्शयति

दण्डः समवैशाल्य-युक्तः अस्ति तथा क्रमागतयोः दण्डयोः मध्ये समानं दूरी वर्त्तते ।

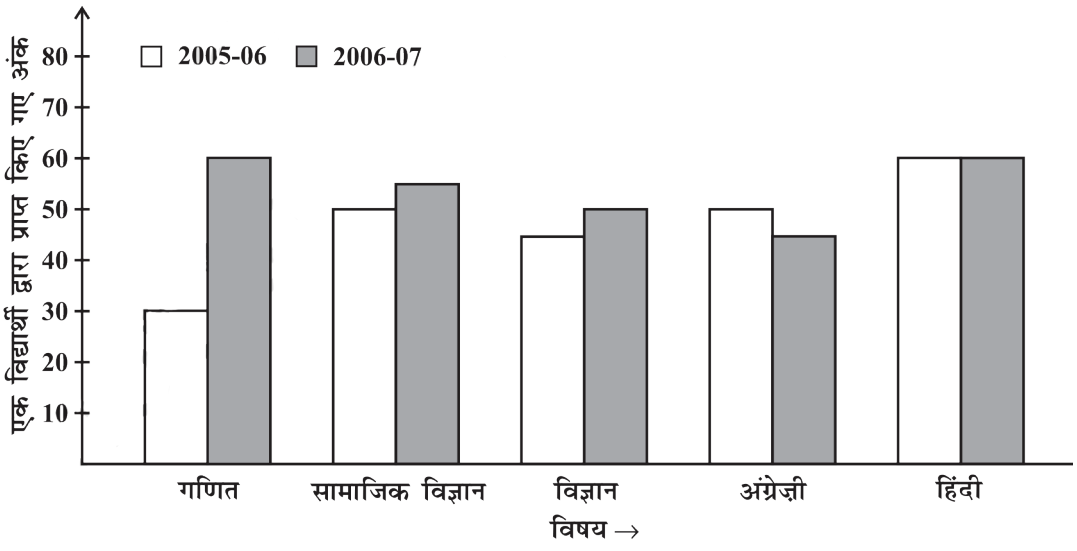
(i) अनेन दण्डालेखेन का सूचना प्रदत्ता अस्ति ?

(ii) कस्मिन् वर्षे विद्यार्थिनां संख्यायां सर्वाधिकवृद्धिः अभवत् ?

(iii) कस्मिन् वर्षे विद्यार्थिनां संख्या अधिका वर्त्तते ?

(iv) ज्ञापयन्तु सत्यम् अस्ति उत असत्यं यत् "2005-06 विद्यार्थिनां संख्या 2003-04 वर्षस्य संख्यायाः द्विगुणिता वर्त्तते ।"

3. **द्वि-दण्डालेखः** - गणनायाः समूहद्वयं संयुक्तरूपेण प्रदर्श्यमानः दण्डालेखः ।



(i) अनेन द्वि-दण्डालेखेन का सूचना प्रदत्ता अस्ति ?

(ii) कस्मिन् विषये विद्यार्थिनां प्रदर्शने सर्वाधिकं संशोधनं जातम् ?

(iii) कस्य विषयस्य प्रदर्शने न्यूनता जाता ?

(iv) कस्मिन् विषये प्रदर्शनं समानम् अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

यदि वयम् एकस्य दण्डालेखस्य दण्डेषु कस्यापि एकस्य स्थितिपरिवर्त्तनं चेत् तर्हि किं प्रदर्शित-संज्ञाने किञ्चित् परिवर्त्तनं भवितुम् अर्हति ? कथम् ?

प्रयासं करोतु

प्रदत्त-सूचनां निरूपितुम् एकम् उपयुक्तालेखं रचयन्तु।

1.

मासः	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
विक्रीत-घटिकानां संख्या	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

बालकानां संख्या येभ्यः रोचते	विद्यालयः अ	विद्यालयः ब	विद्यालयः स
पदयात्रा	40	55	15
द्विचक्रिका-चालनम्	45	25	35

3. 8 सर्वश्रेष्ठ-क्रिकेटद्वन्दिभिः एकदिवसीय-अन्ताराष्ट्रीयक्रिकेटस्पर्धासु विजयस्य प्रतिशतम्।

दलम्	विजेता विजयपुरस्कारतः विश्वचषकं 2006 पर्यन्तम्	2007 तमे वर्षे गत 10 एकदिवसीय-अन्ताराष्ट्रिय क्रिकेटक्रीडा
दक्षिण-अफ्रीकादेशः	75%	78%
ऑस्ट्रेलियादेशः	61%	40%
श्रीलङ्कादेशः	54%	38%
न्यूजीलैण्डदेशः	47%	50%
इंग्लैण्डदेशः	46%	50%
पाकिस्तानदेशः	45%	44%
वेस्टइंडीजदेशः	44%	30%
भारतदेशः	43%	56%

5.2 गणनानां सङ्घटनम्

प्रायः वयम् उपलब्धगणनाम् असंघटितरूपं प्राप्नुमः यां यथाप्राप्त गणना इति कथयामः। अर्थपूर्णं निष्कर्षं प्राप्तुम् अस्माकं कृते गणनानां क्रमबद्धरूपेण सङ्घटनस्य आवश्यकता भवति। उदाहरणार्थं विद्यार्थिनाम् एकात् समूहात् तस्य रुचिकरविषयं पृष्टवन्तः। अस्य परिणामस्य सूची नीचैः प्रदत्ता अस्ति।

कला, गणितम्, विज्ञानम्, आङ्ग्लम्, गणितम्, कला, आङ्ग्लम्, गणितम्, आङ्ग्लम्, कला, विज्ञानम्, कला, विज्ञानम्, विज्ञानम्, गणितम्, कला, आङ्ग्लम्, कला, विज्ञानम्, गणितम्, विज्ञानम्, कला।

कः विषयः सर्वाधिकः प्रियः अथ कः विषयः सर्वाधिकः अप्रियः ?

आकस्मिकरूपेण लिखितं विषयं दृष्ट्वा अस्य प्रश्नस्य उत्तरं सम्भवं नास्ति। वयं मेलनचिह्नस्य प्रयोगं कुर्वन्तः एतां गणनां सारणी 5.1 इत्यस्यां व्यवस्थां कुर्मः।

सारणी 5.1

विषयः	मेलनचिह्नम्	विद्यार्थिनां संख्या
कला	𝍸 ||	7
गणितम्	𝍸	5
विज्ञानम्	𝍸 |	6
आङ्ग्लम्	||||	4

प्रत्येकं विषयस्य सम्मुखम् अङ्कित-मेलनचिह्नानां संख्यातः वयं विशिष्टविषयेच्छुकानां विद्यार्थिनां संख्यां प्राप्नुमः।

एषा संख्या तस्य विषयस्य नैरन्तर्येण भवति।

कस्याः अपि प्रविष्टेः निरन्तरता सा संख्या अस्ति यावत् बारं सा प्रविष्टिः गणनायाम् आगच्छति।

सारणी 5.1 इत्यतः आङ्ग्लविषयेच्छुकानां विद्यार्थिनां निरन्तरता 4 अस्ति। गणितविषयेच्छुकानां विद्यार्थिनां निरन्तरता 5 अस्ति।

उपरोक्तरूपेण निर्मापिता सारणी एका निरन्तरा-वण्टन-सारणी रूपेण ख्याता अस्ति यतो हि अनया एतत् सुनिश्चितं भवति यत् एका प्रविष्टिः कति बारम् आगता।

प्रयत्नं कुर्वन्तु -

प्रयासं करोतु

1. विद्यार्थिनाम् एकस्मात् समूहात् एतत् ज्ञापितुं कथितवान् यत् ते कं पशुं सर्वाधिकं गृहे पालितुम् इच्छन्ति। अस्य परिणामः नीचैः दत्तः अस्ति।
   कुक्कुरः, मार्जारी, मार्जारी, मत्स्यः, मार्जारी, शशकः, कुक्कुरः, मार्जारी, शशकः, कुक्कुरः, मार्जारी, कुक्कुरः, कुक्कुरः, कुक्कुरः, मार्जारी, गौः, मत्स्यः, शशकः, कुक्कुरः, मार्जारी, कुक्कुरः, मार्जारी, मार्जारी, कुक्कुरः, शशकः, मार्जारी, मत्स्यः, कुक्कुरः, उपरोक्ताय एकां निरन्तरां वण्टन-सारणीं निर्मापयन्तु।

5.3 गणनानां वर्गीकरणम्

विषयस्य रुचिसम्बन्धितगणनाः प्रत्येकप्रविष्टेः नैके बारं आगमनं प्रदर्शयति। उदाहरणार्थं कलां 7 विद्यार्थिनः इच्छन्ति, गणितं 5 विद्यार्थिनः इच्छन्ति इत्यादिः (सारणी 5.1)। एतां सूचनां आलेखीयरूपेण एकेन चित्रालेखेन अथवा एकेन दण्डालेखेन प्रदर्शयितुं शक्नुवन्ति परन्तु कदाचित् वयं बृहद् गणनया सह कार्यं कुर्मः।

उदाहरणार्थं VIII कक्ष्यायाः 60 संख्यकैः विद्यार्थिभिः गणिते प्राप्तेषु अङ्केषु विचारं कुर्वन्तु।

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

यदि वयं प्रत्येकप्रेक्षणाय एकां निरन्तरां वण्टन-सारणीं निर्मापयामः तर्हि सा बहु लम्बा भविष्यति । अतः वयं सौलभ्यार्थं प्रेक्षणस्य काञ्चन समूहं वर्गं वा निर्मापयामः यथा - 0-10, 10-20 इत्यादिः तथा प्रत्येक-समूहे वर्गे वा आगतानां प्रेक्षणानां संख्याधारे एकां निरन्तरां वण्टन-सारणीं प्राप्नुमः । इत्थं रीत्या उपरोक्तगणनानां कृते निरन्तरा वण्टन-सारणी भवितुम् अर्हति ।

सारणी 5.2

समूहः	**मेलनचिह्नम्**	**निरन्तरता**
0-10	||	2
10-20	𝍸 𝍸	10
20-30	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21
30-40	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19
40-50	𝍸 ||	7
50-60	|	1
	योगः	**60**

उपरोक्तप्रकारेण प्रस्तुत-गणना वर्गीकृत-गणना रूपेण भवति तथा प्राप्तवण्टनं वर्गीकृत-निरन्तरता-वण्टन रूपेण भवति । एतेन अर्थपूर्णनिष्कर्षं ज्ञातुं वयं सहायतां प्राप्नुमः, यथा -

(1) अधिकांश-विद्यार्थिनः 20 तथा 40 प्रतिशतमध्ये एव अङ्कान् प्राप्तवन्तः ।

(2) अष्ट-विद्यार्थिनः 50 अङ्केषु 40 तः अधिकान् अङ्कान् प्राप्तवन्तः ।

समूहेषु - 0 - 10, 10 - 20, 20 - 30 इत्यादिषु प्रत्येकम् एकः वर्ग-अन्तरालः [अथवा संक्षेपे एकः वर्गः] भवति ।

ध्यानं ददतु यत् प्रेक्षणं 10 उभयोः अपि वर्गेषु 0 - 10 तथा 10 -20 इत्यस्मिन् सम्मिलितं वर्त्तते । एवमेव 20 वर्गः 10 -20 यथा 20 -30 द्वयोः मध्ये सम्मिलितः अस्ति । परन्तु एकं प्रेक्षणं (10 अथवा20) उभयोः वर्गयोः सहैव सम्मिलितं भवितुं नार्हति । एतस्मात् संरक्षणाय वयम् इयं परिपाटीं स्वीकुर्मः यत् उभयनिष्ठप्रेक्षणं उच्चतरवर्गे सम्मिलितं भविष्यति । अर्थात् प्रेक्षणं 10 इति 10 - 20 इत्यस्मिन् सम्मिलितं नास्ति (0 - 10 इत्यस्मिन् न) । एवमेव 20 वर्ग-अन्तरालः 20 -30 मध्ये सम्मिलितः अस्ति (10 - 20 इत्यस्मिन् न) । वर्ग-अन्तरालः 10 - 20 मध्ये 10 निम्नवर्गसीमा भवति तथा 20 इत्युपरि अथवा उच्चवर्गसीमा भवति । एवमेव वर्ग-अन्तराले 20 - 30 मध्ये 20 निम्नवर्गसीमा अस्ति तथा 30 उच्चवर्गसीमा अस्ति । ध्यानं ददतु यत् 0 - 10, 10 - 20, 20 - 30 इत्यादिषु वर्ग-अन्तरालेषु प्रत्येकस्य उच्चवर्गसीमा अथ निम्नवर्गसीमा इत्यनयोः अन्तरः समानः एव (एतादृशि स्थितौ 10) । उपरि (अथवा उच्चः) वर्गसीमा तथा निम्नवर्गसीमा इत्यनयोः अयम् अन्तरालः वर्ग-अन्तरालस्य वैशाल्यम् अथवा मापनं भवति ।

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखित-निरन्तरता-वण्टन-सारणीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा निम्नप्रश्नान् उत्तरन्तु।

सारणी 5.3

वर्ग-अन्तराल: (रुप्यकेषु दैनिकम् आय:)	**निरन्तरता (श्रमिकाणां संख्या)**
100 - 125	45
125 -150	25
150 -175	55
175 - 200	125
200 - 225	140
225 - 250	55
250 - 275	35
275 - 300	50
300 -325	20
योग:	**550**

(i) वर्ग-अन्तरालानां माप: क: अस्ति ?

(ii) कस्य वर्गस्य सर्वाधिक-निरन्तरता अस्ति ?

(iii) कस्य वर्गस्य न्यून-निरन्तरता अस्ति ?

(iv) वर्ग-अन्तरालस्य 250-275 इत्यस्य उच्चसीमा का ?

(v) कयो: उभयो: वर्गयो: निरन्तरता समाना एव अस्ति ?

2. 30 - 35, 35 - 40 इत्यादीनाम् अन्तरालानाम् उपयोगं कुर्वन्त: 20 विद्यार्थिनां (kg इत्यस्मिन्) भाराणांनिम्नलिखित-गणनायै एकां निरन्तरता-वण्टन-सारणीं निर्मापयन्तु । 40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39

5.3.1 एकया विभिन्नतया सह दण्ड:

आगच्छन्तु 60 विद्यार्थिभि: गणितस्य निकष-परीक्षायां प्राप्ताङ्कानां वर्गीकृत-निरन्तरता-वण्टनविषये पुन: विचारं कुर्वन्तु (सारणी 5.4)।

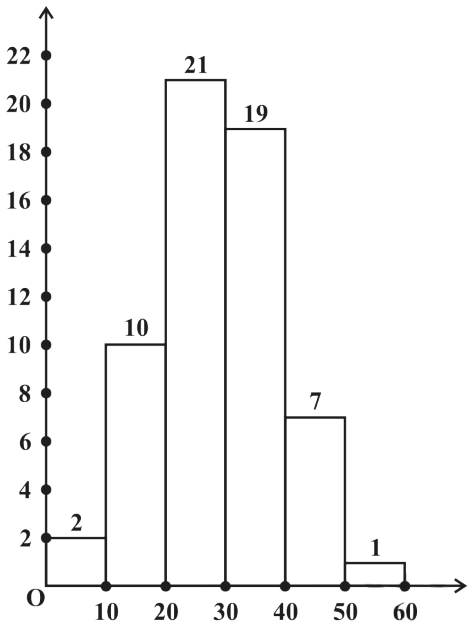
सारणी 5.4

वर्ग-अन्तराल:	**निरन्तरता**
0 - 10	2
10 - 20	10
20 - 30	21
30 - 40	19
40 -50	7
50 -60	1
योग:	**60**

उपरोक्तं संलग्न-आलेखरूपे निरूप्य प्रदर्शयति (आकृतिः 5.1)।

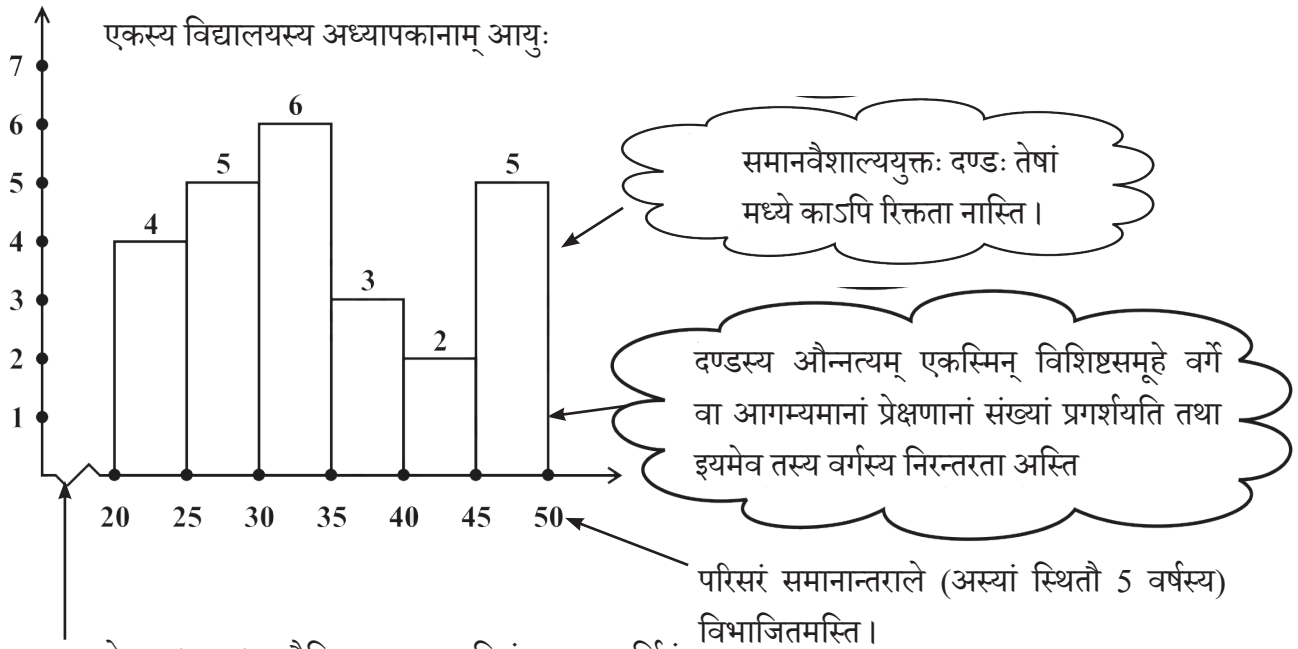
किम् अयम् आलेखः तस्मात् दण्डालेखात् कस्मिन्नपि रूपे भिन्नः अस्ति यं भवन्तः vii कक्ष्यायां रचितवन्तः ? ध्यानं ददतु यत् अत्र वयं क्षैतिजाक्षे प्रेक्षणानां समूहं (अर्थात् वर्ग-अन्तरालम्) निरूपयामः । दण्डस्य औन्नत्यं वर्गान्तरालस्य निरन्तरतां प्रदर्शयति । सहैव अत्र दण्डानां मध्ये काऽपि रिक्तता नास्ति, यतो हि वर्गान्तरालानां मध्ये काऽपि रिक्तता नास्ति।

गणनानाम् इदृक् आलेखीय-निरूपणम् एकम् आयतचित्रं भवति (आकृतिः 5.2)।



विद्यार्थिनां प्राप्ताङ्काः

आकृतिः 5.1



आकृतिः 5.2

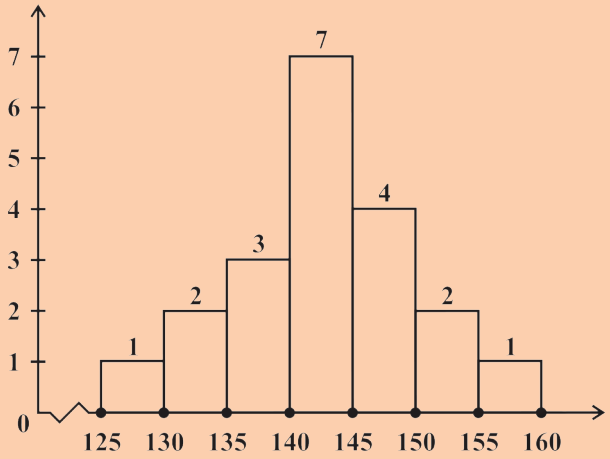
अस्य आयतचित्रस्य दण्डेन वयं निम्नलिखितप्रश्नस्य उत्तरं दातुं शक्नुमः।

(i) कति अध्यापकानाम् आयुः 45 वर्षतः अथवा तस्मात् अपि अधिकः अस्ति परन्तु 50 वर्षात् न्यूनः अस्ति ?

(ii) 35 वर्षात् न्यूनायुः युक्तानाम् अध्यापकानां संख्या कति अस्ति ?

प्रयासं करोतु

1. आयतचित्रं (आकृतिः 5.3) दृष्ट्वा तथा निम्नप्रश्नान् उत्तरन्तु।



(उत्तुङ्गता सेंटीमीटर इत्यस्मिन्)

आकृतिः 5.3

(i) अनेन आयतचित्रेण का सूचना प्रदत्ता अस्ति ?

(ii) कस्मिन् वर्गे अधिकाः बालिकाः सन्ति ?

(iii) कति बालिकानां औन्नत्यं 145 सेंटीमीटरइति अस्ति अथवा इतोऽपि अधिकम् अस्ति ?

(iv) यदि वयं बालिकाः निम्नलिखितेषु श्रेणिषु विभजामः तर्हि प्रत्येकस्मिन् कति बालिकाः भविष्यन्ति ?

150 cm अथवा एतस्मात् अधिकम्	-	अ समूहः
140 cm इत्यतः अधिकं परन्तु 150 cm इत्यतः न्यूनम्	-	ब समूहः
140 इत्यतः न्यूनम्	-	स समूहः

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखितेषु कां गणनां दर्शितुं भवन्तः एकस्य आयतचित्रस्य प्रयोगं करिष्यन्ति ?

(a) एकस्य पत्रवाहकस्य स्यूते विभिन्नक्षेत्राणां पत्राणां संख्या।

(b) कस्याम् अपि क्रीडा-प्रतियोगितायां प्रत्याशिनाम् औन्नत्यम्।

(c) 5 उद्योगगृहेण निर्मितानां ध्वनिमुद्रिकानां संख्या।

(d) कस्मिंश्चित् रेल्वे-स्थानके प्रातः 7 वादनात् 7 वादनपर्यन्तं रेलयानेन गम्यमानानां यात्रिणां संख्या।

प्रत्येकस्य कृते कारणम् अपि प्रददतु।

2. कस्मिंश्चित् विभागीय-आपणे क्रयणार्थम् आगतान् जनान् एवं रीत्या अङ्कितं कर्त्तुं शक्नुवन्ति - पुरुषः (M), महिला (W), बालकः (B) अथवा बालिका(G)।निम्नलिखितसूची तान् क्रेतॄन् प्रदर्शयति, ये प्रातःकाले प्रथमघण्टायाम् आगताः।

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W W M
W B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

मेलकचिह्नानां प्रयोगं कुर्वन्तः एकां निरन्तरता-वण्टन-सारणीं निर्मापयन्तु। एतां प्रदर्शितुं एकं दण्डालेखं रचयन्तु।

3. कस्यापि उद्योगगृहस्य श्रमिकाणां साप्ताहिक-पारिश्रमिकं (रुप्येषु) निम्नलिखितं वर्त्तते।

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

मेलकचिह्नानां प्रयोगं कुर्वन्तः 800 - 810, 810 - 820 इति अन्तरालयुक्ताम् एकां निरन्तरता-वण्टन-सारणीं निर्मापयन्तु।

4. 3 संख्याके प्रश्ने गणनातः प्राप्तसारण्यै एकम् आयतचित्रं निर्मापयन्तु तथा निम्नलिखितप्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) कस्मिन् समूहे श्रमिकाणां संख्या सर्वाधिका अस्ति ?

(ii) कति श्रमिकाः 850 रु. अथवा तस्मात् अपि अधिकम् अर्जयन्ति ?

(iii) कति श्रमिकाः 850 रु. तः न्यूनम् अर्जयन्ति ?

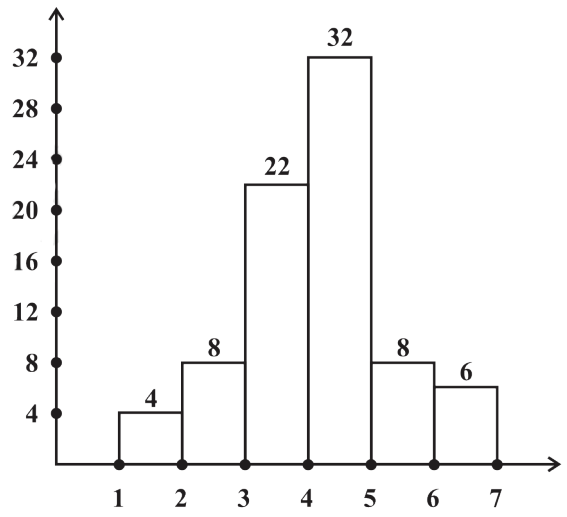
5. अवकाशदिवसेषु एकस्याः विशिष्टायाः कक्ष्यायाः विद्यार्थिभिः प्रतिदिनं दूरदर्शनं दर्शनस्य समयः (घण्टासु) प्रदत्ते आलेखे प्रदर्शितः अस्ति।

निम्नलिखितप्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) अधिकतमाः विद्यार्थिनः कति घण्टा पर्यन्तं दूरदर्शनं दृष्टवन्तः ?

(ii) 4 घण्टातः न्यूनसमयं यावत् कति विद्यार्थिनः दूरदर्शनं दृष्टवन्तः ?

(iii) कति विद्यार्थिनः दूरदर्शनदर्शने 5 घण्टातः अधिकसमयं व्यतीतवन्तः ?

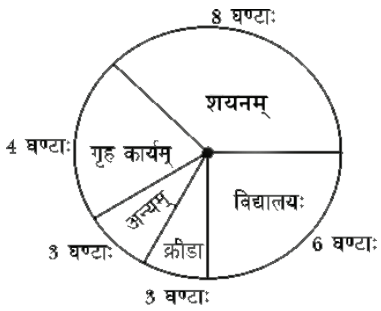


प्रतिदिनस्य दर्शितदूरदर्शनस्य घण्टा

5.4 वृत्तालेखः अथवा पाईचित्रम् -

किं भवतां सम्मुखं कदापि वृत्तीय-रूपे निरूपिता गणना प्रस्तुता अभवत् यथा आकृतिः 5.4 इत्यस्यां प्रदर्शिता अस्ति ?

एकस्मिन् दिने एकेन बालकेन व्यतीतः समयः ।



एकस्मिन् नगरे जनानाम् आयुसमूहः ।

आकृतिः 5.4

एतत् निरूपणं वृत्त-आलेखः इति नाम्ना प्रसिद्धः । एकः वृत्त-आलेखः एकस्मिन् सम्पूर्णे तथा तस्य भागेषु सम्बन्धं प्रदर्शयति । अत्र सम्पूर्णं वृत्तं त्रिज्यखण्डेषु विभाजितम् अस्ति । प्रत्येक-त्रिज्यखण्डस्य आकारः तेन निरूपितः क्रियाकलापस्य सूचनायाः समानुपाती भवति ।

उदाहरणार्थम् उपरोक्त-आलेखे, शयनक्रियायां व्यतीतासु घण्टासु त्रिज्याखण्डस्य आनुपातिकः भागः -

$$= \frac{\text{शयनघण्टानांसंख्या}}{\text{सम्पूर्णदिनम्}} = \frac{8 \text{ घण्टाः}}{24 \text{ घण्टाः}} = \frac{1}{3}$$

अतएव एतं त्रिज्यखण्डं सम्पूर्णवृत्तस्य $\frac{1}{3}$ इति भागरूपे रचितवान् अस्ति एवमेव विद्यालये व्यतीतासु घण्टासु त्रिज्याखण्डस्य आनुपातिकः भागः -

$$= \frac{\text{विद्यालयघण्टानांसंख्या}}{\text{सम्पूर्णदिनम्}} = \frac{6 \text{ घण्टाः}}{24 \text{ घण्टाः}} = \frac{1}{4}$$

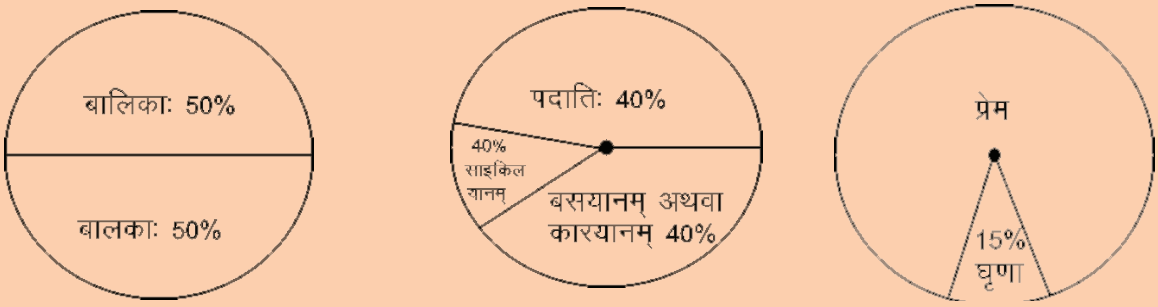
अतएव एतं त्रिज्यखण्डं वृत्तस्य $\frac{1}{4}$ इति भागरूपे रचितवान् अस्ति एवमेव अन्येषां त्रिज्यखण्डानां मापं ज्ञातुं शक्नुमः ।

सर्वेषां क्रियाकलापानां भिन्नं योजयन्तु । किं भवन्तः योगे एकम् इति प्राप्नुवन्ति ?

वृत्त-आलेखः पाईचित्रं रूपे अपि ख्यातः वर्त्तते ।

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखित-पाईचित्रेषु प्रत्येकं (आकृतिः 5.5) भवतां कक्षाविषये एकां भिन्नप्रकारकां सूचनां प्रददति। एतेषु प्रत्येकं सूचनां निरूपितवृत्तस्य भागं जानन्तु।



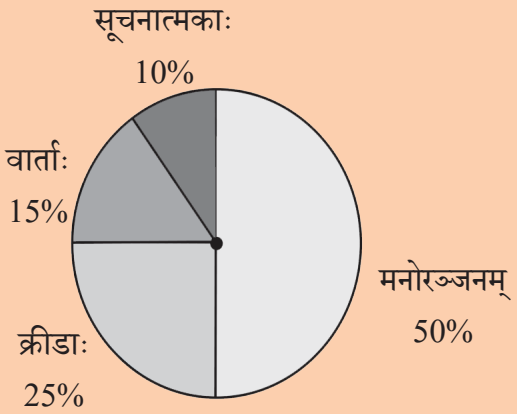
बालिकाः अथवा बालकाः | विद्यालयाय परिवहनम् | गणितेन सह प्रेम / घृणा

आकृतिः 5.6

2. दत्ते पाईचित्राधारे (आकृतिः 5.6) निम्नलिखितप्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) किं प्रकारकं कार्यक्रमं सर्वाधिकं जनाः दृष्टवन्तः ?

(ii) कयोश्चित् द्वयोः प्रकारयोः कार्यक्रमान् दृष्टवतां सम्पूर्णसंख्या क्रीडानां कार्यक्रमान् दृष्टवतां संख्यायाः समतुल्यं वर्त्तते ?



दूरदर्शने विभिन्नप्रकारक प्रणालीप्रेक्षकाणां संख्या।

आकृतिः 5.6

5.4.1 पाईचित्राणां रचना

कस्यापि विद्यालयस्य विद्यार्थि द्वारा ईप्स्यमाण-पयोहिमस्य गन्धः स्वादश्च (प्रतिशतेषु) निम्नप्रकोष्ठे दत्तः अस्ति।

गन्धः	गन्धेच्छुकानां विद्यार्थिनां प्रतिशतम्
चाकलेहः	50%
वेए	25%
अन्य-प्रकारः	25%

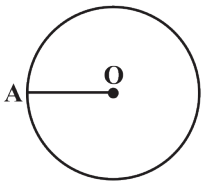
आगच्छन्तु एतां गणनां एकस्मिन् पाई-चित्ररूपे निरूपयामः।

वृत्तस्य केन्द्रे सम्पूर्णः कोणः 360° अस्ति। त्रिज्यखण्डानां केन्द्रीयकोणाः 360° इत्यस्य भागाः अथवा केचन-भिन्नाः भविष्यन्ति। वयं त्रिज्यखण्डानां केन्द्रीयकोणान् ज्ञातुम् एकां सारणीं निर्मापयामः (सारणी 5.5)।

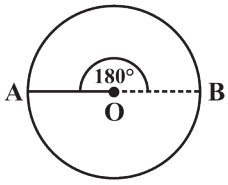
सारणी 5.5

गन्धः	गन्धेच्छुकानां विद्यार्थिनां प्रतिशतम्	सम्पूर्णस्य भागः	360° भागः
चाकलेहः	50%	$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	360° इत्यस्य $\frac{1}{2}$ =180°
वेनीला-चाकलेहः	25%	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$	360° इत्यस्य $\frac{1}{4}$ =90°
अन्यप्रकारः	25%	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$	360° इत्यस्य $\frac{1}{4}$ =90°

1. कस्याः अपि सौलभ्ययुक्तायाः त्रिज्यायाः एकं वृत्तं निर्मापयन्तु। अस्याः केन्द्रं (O) तथा एका त्रिज्या (OA) इति अङ्कितं कुर्वन्तु।



2. चाकलेहस्य त्रिज्यखण्डस्य कोणः 180° अस्ति। कोणमापकस्य प्रयोगं कृत्वा ∠AOB=180° रचयन्तु।



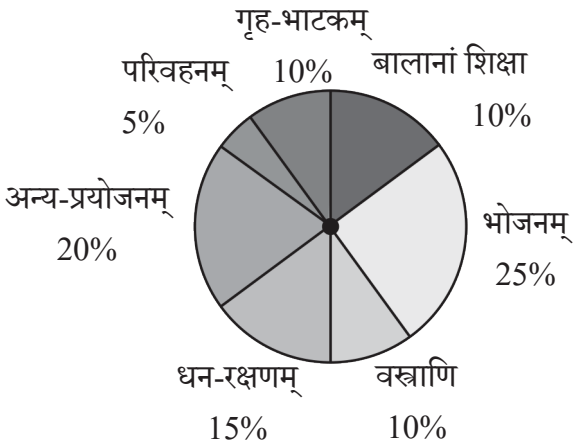
3. अवशिष्टं त्रिज्यखण्डम् एवमेव अङ्कितं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 1 संलग्नपाईचित्रे (आकृतिः 5.7) एकस्मिन् मासे एकस्य परिवारस्य विभिन्नपक्षे व्ययं तथा तस्य (प्रतिशतेषु) संरक्षणं प्रदर्शयति।

(i) कस्मिन् पक्षे व्ययः अधिकः आसीत् ?

(ii) कस्मिन् पक्षे कृत-व्ययः परिवारस्य सम्पूर्णसंरक्षणस्य सदृशम् अस्ति ?

(iii) यदि परिवारस्य मासिकं संरक्षणं 3000 रु. अस्ति तर्हि वस्त्रेषु कृतः मासिकः व्ययः कः अस्ति ?



आकृतिः 5.7

समाधानम् -

(i) भोजने व्ययः सर्वाधिकः अस्ति।

(ii) बालानां कृते शिक्षाविषयकः व्ययः (15%) परिवारस्य सम्पूर्ण संरक्षणसमानम् अस्ति।

(iii) 15% निरूपयति 3000 रु.।

अतः 10% निरूपयति रु. $\frac{3000}{15} \times 10 = 2000$ रु.।

उदाहरणम् 2 एकस्मिन् विशेषदिवसे मिष्ट्रानगृहे विभिन्नवस्तूनां विक्रयणं निम्नकोष्ठके (रुप्येषु) प्रदत्तम् अस्ति।

सामान्यसुपिष्टकम्	-	320
फलसुपिष्टकम्	-	80
मधुरपिष्टकं -पेस्ट्री च	-	160
पिष्टकम्	-	120
अन्यम्	-	40
योगः	**-**	**720**

एतासां गणनानां कृते एकं पाईचित्रं निर्मापयन्तु

समाधानम् - वयं प्रत्येकस्य त्रिज्यखण्डस्य केन्द्रीयकोणं जानीमः। अत्र सम्पूर्णं विक्रयणम् - 720 रु. अस्ति। एतस्मात् वयं निम्नलिखितसारणीं प्राप्नुमः।

वस्तु	विक्रयणम् (रुप्येषु)	सम्पूर्णस्य भागः	केन्द्रियकोणः
सामान्यसुपिष्टकम्	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360^\circ = 160^\circ$
सुपिष्टकम्	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$
केकपेस्ट्री च	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360^\circ = 80^\circ$
फलब्रेड	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360^\circ = 40^\circ$
अन्यम्	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360^\circ = 20^\circ$

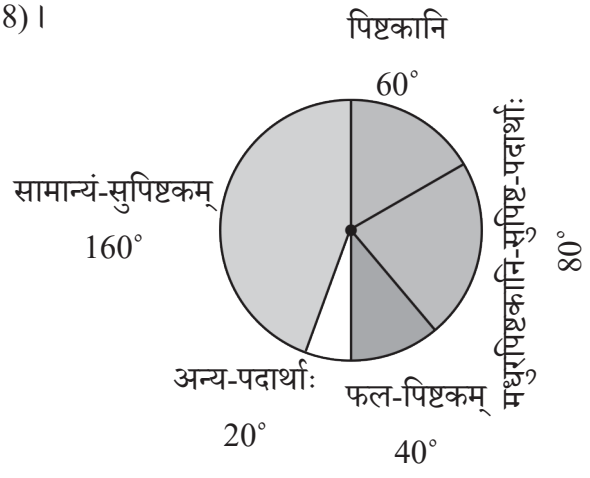
उपरोक्तानाम् उपयोगं कृत्वा अधुना वयं पाईचित्रं निर्मामः (आकृतिः 5.8)।

प्रयासं करोतु

निम्नगणनानां कृते एकं पाईचित्रं निर्मापयन्तु -

एकेन बालकेन एकस्मिन् दिने व्यतीतः समयः एतादृशः अस्ति।

शयनम्	-	8 घण्टाः
विद्यालयः	-	6 घण्टाः
गृहकार्यम्	-	4 घण्टाः
क्रीडा	-	4 घण्टाः
अन्यम्	-	2 घण्टाः



आकृतिः 5.8

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

निम्नलिखितगणनां प्रदर्शितुं कीदृशः आलेखः उपयुक्तः भविष्यति -

1. कस्यापि राज्यस्य खाद्यान्नस्य उत्पादनम् -

वर्षः	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादनम् लक्ष-टन-परिमितेषु	60	50	70	55	80	85

2. जनानां एकस्य समूहस्य भोजनस्य रुचिः -

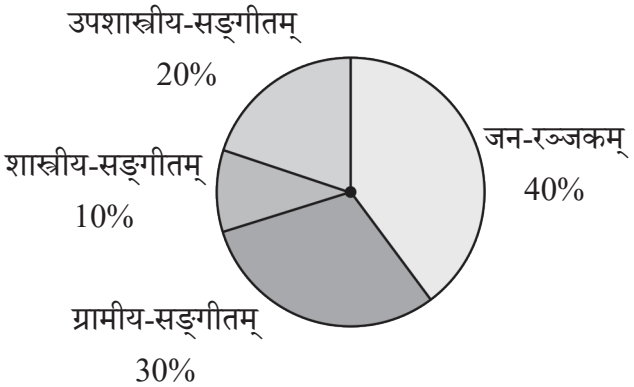
रुचिकर-भोजनम्	**जनानां संख्या**
उत्तर-भारतीयः	30
दक्षिण-भारतीयः	40
चीन-देशीयः	25
अन्यः	25
योगः	120

3. कस्यापि उद्योगगृहस्य श्रमिकाणाम् एकस्य समूहस्य दैनिक-आयः -

दैनिक-आयः (रुप्यकेषु)	**श्रमिकाणां संख्या (एकस्मिन् उद्योगगृहे)**
75 - 100	45
100 - 125	35
125 - 150	55
150 - 175	30
175 - 200	50
200 - 225	125
225 - 250	140
योगः	480

प्रश्नावली 5.2

1. कस्यापि नगरस्य युवजनानां एकस्य जनसमूहस्य निरीक्षणम् अभवत् एतत् ज्ञानार्थं यत् ते कीदृक् सङ्गीतम् इच्छन्ति। इतः प्राप्तगणनां संलग्नपाईचित्रे प्रदर्शितम् अस्ति । अस्मात् पाईचित्रात् निम्नलिखितप्रश्नान् उत्तरन्तु।



(i) यदि 20 परिमिताः जनाः शास्त्रीयसङ्गीतम् इच्छन्ति तर्हि आहत्य कति युवजनानां निरीक्षणम् अभवत् ?

(i) कीदृशं सङ्गीतं सर्वाधिकजनाः इष्टवन्तः ?

(ii) यदि कश्चित् सान्द्रमुद्रिका-समवायः 1000 सान्द्रमुद्रिका (सी.डी.) तर्हि सः प्रत्येकं प्रकारिकां कति सान्द्रमुद्रिकां निर्माति ?

2. 360 जनानाम् एकस्मात् समूहात् त्रिषु ऋतुषु स्व-रुचिकरस्य ऋतोः कृते मतदानकरणार्थम् अकथयत् । तस्मात् प्राप्तगणनां संलग्नचित्रे प्रदर्शितम् अस्ति ।

(i) कम् ऋतुं सर्वाधिकं मतम् अमिलत् ?

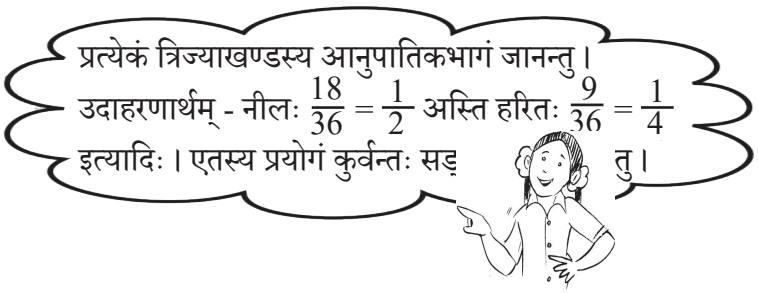
(ii) प्रत्येकत्रिज्यखण्डस्य केन्द्रीयकोणं जानन्तु ।

(iii) एतां सूचनां प्रदर्शयितुम् एकं पाईचित्रं निर्मापयन्तु ।

ऋतुः	मतानां संख्या
ग्रीष्मः	90
वर्षा	120
शीतः	150

3. निम्नलिखितसूचनां प्रदर्शनार्थम् एकं पाईचित्रं निर्मापयन्तु । एषा सारणी जनानाम् एकसमूहद्वारा इच्छितवर्णान् दर्शयति ।

वर्णः	जनानां संख्या
नीलः	18
हरितः	9
रक्तः	6
पीतः	3
योगः	**36**



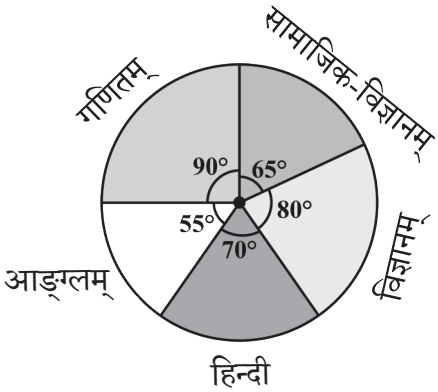
4. संलग्नपाईचित्रं एकेन विद्यार्थिना कस्याञ्चित् परीक्षायां हिन्द्याम्, आङ्ग्ले, गणिते, सामाजिकविज्ञाने, विज्ञाने च प्राप्ताङ्काः दर्शिताः यदि तस्य विद्यार्थिनः सम्पूर्णाः प्राप्ताङ्काः 540 इति आसन् तर्हि निम्नलिखित-प्रश्नान् उत्तरत ।

(i) कस्मिन् विषये तेन विद्यार्थिना 105 इति अङ्काः प्राप्ताः ?

(सङ्केतः 540 अङ्कानां कृते केन्द्रीयकोणः 360° अस्ति । अतः 105 अङ्कानां कृते केन्द्रीयकोणः किं भविष्यति ?)

(ii) तेन विद्यार्थिना गणिते हिन्दीतः कति अधिकाः अङ्काः प्राप्ताः ?

(iii) परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं सामाजिकविज्ञाने तथा गणिते प्राप्तानाम् अङ्कानां योगः विज्ञाने तथा हिन्द्यां प्राप्ताङ्कानां योगात् अधिकः अस्ति । (**सङ्केतः** केवलं केन्द्रीयकोणेषु ध्यानं ददतु ।)



5. कस्मिन्नपि छात्रावासे विभिन्नभाषां वदतां विद्यार्थिनां संख्या नीचैः प्रदत्ता अस्ति । एतां गणनां पाईचित्रमाध्यमेन प्रदर्शयन्तु ।

भाषा	हिन्दी	आङ्ग्लम्	मराठी	तमिलः	बङ्गः	योगः
विद्यार्थिनां संख्या	40	12	9	7	4	72

5.5 संयोगः प्रायिकता च

कदाचित् एवं भवति यत् वर्षर्तौ वयं प्रत्येकं दिनं वर्षत्रं नीत्वा बहिः गच्छामः तथा बहुदिनं यावत् वर्षा एव न भवति परन्तु संयोगवशात् भवान् वर्षत्रं नीत्वा न गच्छति तथा तस्मिन् दिने एव बहुवर्षा भवति।

कदाचित् एवं भवति यत् एकः विद्यार्थी एकस्याः घटकपरीक्षायाः कृते पञ्चसु 4 अध्यायपर्यन्तं बहु सम्यक् रूपेण सज्जतां करोति परन्तु एकः बृहत् प्रश्नः तस्मात् अध्यायात् आगच्छति यम् अध्यायं सः सम्यक् रूपेण न अपठत्।

प्रत्येकं जनः जानाति यत् एकं विशेषं रेलयानं निश्चितसमयेन गच्छति परन्तु यस्मिन् दिने भवान् निश्चितसमये स्थानकं प्राप्नोति तस्मिन् दिने एव तत् यानं विलम्बेन आगच्छति।

भवान् उपरोक्तप्रकारकाणाम् अनेकेषां स्थितिनां सम्मुखे आगच्छति यत्र भवान् संयोगस्य नाम गृहीत्वा कार्यं कर्त्तुम् इच्छति परन्तु तत् तथा न सम्भवति यथा भवान् इच्छति। किं भवान् एतादृशम् इतोऽपि उदाहरणं दातुं शक्नोति। एतानि एतादृशानि उदाहरणानि सन्ति यत्र कस्यापि सम्भवासम्भवस्य संयोगः समानः नास्ति।

एकस्य रेलयानस्य समयोपरि गमनागमनस्य संयोगः समानः नास्ति। यदा भवान् कामपि चिटिकां क्रीणाति तथा यदि सा चिटिका प्रतीक्षासूच्यां भवति तदा निश्चयेन भवान् संयोगाश्रयं गृह्णाति। भवान् एवम् आशां करोति यत् यदा भवान् यात्रां करिष्यति तदा भवतः स्थानं सुरक्षितं भविष्यति परन्तु वयम् अत्र केषाञ्चन प्रयोगानां विचारं कुर्मः येषु परिणामानां घटितस्य संयोगः समानः अस्ति।

5.5.1 कस्यचित् परिणामस्य प्राप्तिः

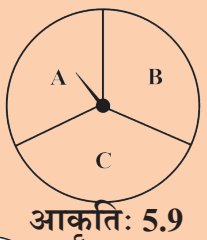
भवान् सम्भवतः एतत् दर्शितवान् यत् एकस्याः क्रिकेटक्रीडायाः प्रारम्भात् पूर्वं उभयोः दलयोः नायकः बहिः गत्वा एतत् निर्णयार्थम् एकं पणम् उत्क्षिपति यत् कं दलं सर्वप्रथमं खेलिष्यति।

यदा एकं पणम् उत्क्षिपति तर्हि भवान् कं सम्भवं परिणामं प्राप्नोति। निःसन्देहम् उच्चपक्षं निम्नपक्षम्।

कल्पनां करोतु यत् भवान् एकस्य दलस्य नायकः अस्ति तथा भवतः मित्रम् अपरस्य दलस्य। भवान् पणम् उत्क्षिपति तथा स्वमित्रात् वदति यत् उच्चपक्षं निम्नपक्षं वा वदतु। किं भवतः अस्याम् उत्क्षेपणक्रियायां किमपि नियन्त्रयणं भवितुम् अर्हति ? किं भवान् उच्चपक्षं प्राप्तुं शक्नोति यदि इच्छति चेत् ? अथवा किं भवान् निम्नपक्षं प्राप्तुं शक्नोति यदि इच्छति चेत् ? न एवं सम्भवं नास्ति। एतादृशः प्रयोगः एकः यादृच्छः उत यादृच्छिकप्रयोगः इति रूपे भवति। उच्चपक्षस्य निम्नपक्षस्य च परिणामद्वयं वर्त्तते।

प्रयासं करोतु

1. यदि भवान् एकं स्कूटरयानचालनं प्रारभेत् तर्हि सम्भवः परिणामः कः ?
2. यदा एकम् अक्षम् उत्क्षिपति तर्हि सम्भावितः षट् परिणामः कः ?
3. यदा भवान् चक्रं भ्रामयिष्यति तर्हि सम्भावितपरिणामः कः भविष्यति (आकृतिः 5.9) ? अस्य सूचीं निर्मापयतु।
   (अत्र परिणामस्य अर्थः अस्ति यत् सः त्रिज्यखण्डः भ्रामणे सति स्थगिष्यति।)
4. भवतः पार्श्वे एकः स्यूतः अस्ति तथा तस्मिन् विभिन्नवर्णानां पञ्च एकसदृशं कन्दुकम् अस्ति (आकृतिः 5.10)। भवान् दर्शनं विनैव तस्मात् एकं कन्दुकं निष्कासयति। प्राप्यमाणान् परिणामान् लिखतु।



आकृतिः 5.9

आकृतिः 5.10

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

एकम् अक्षं प्रक्षेपणे सति -

- किं अग्रिमक्रीडकस्य 6 प्राप्तकरणस्य संयोगः अस्ति ?
- किं तत् पश्चात् क्रीडकस्य 6 प्राप्तकरणस्य संयोगः अस्ति ?
- स्वीकुर्वन्तु यत् अपरः क्रीडकः 6 इति प्राप्नोति किम् अस्य एवम् अर्थः भवितुम् अर्हति यत् तृतीयक्रीडकस्य 6 प्राप्तकरणस्य संयोगः नास्ति ?

5.5.2 समसम्भावित-परिणामः -

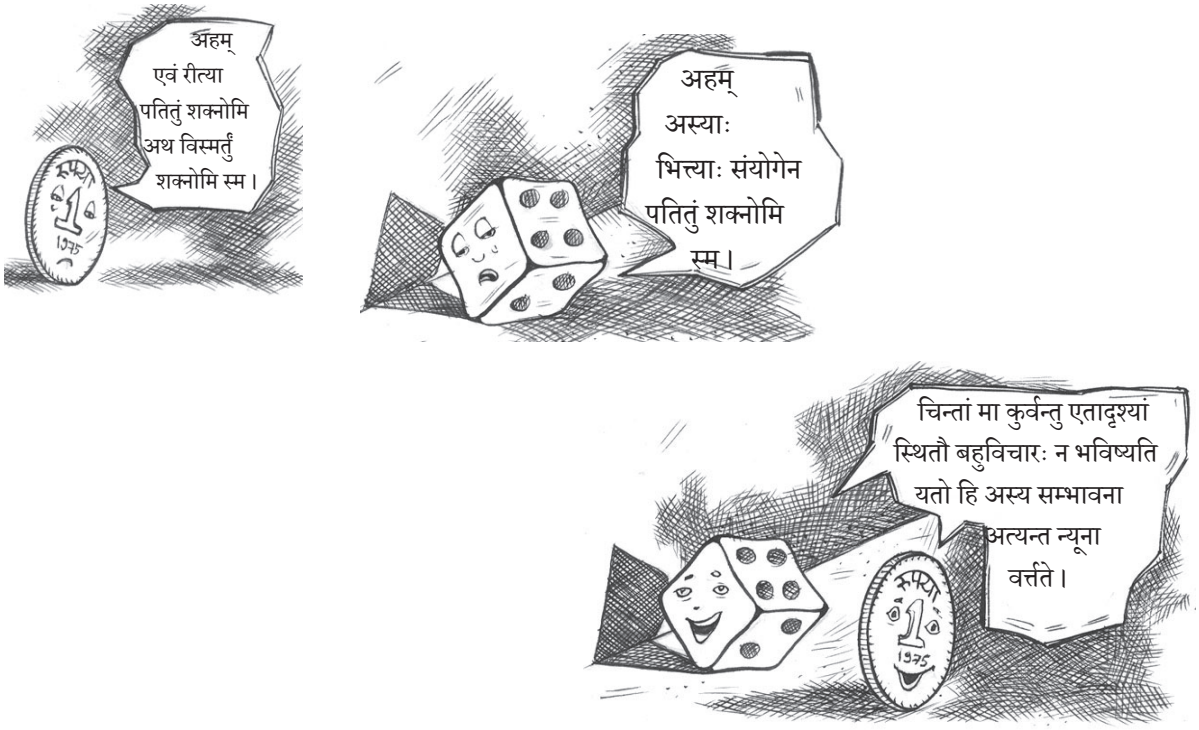
एकं पणम् अनेकबारम् उत्क्षेपयन्ति तथा यावत् बारं उच्चपक्षम् उत निम्नपक्षम् आयाति तत् लेखयति। आगच्छन्तु स्वपरिणामतालिकां पश्यन्तु यत्र वयम् उत्क्षेपणस्य संख्यायां वृद्धिं कुर्मः।

उत्क्षेपणस्य संख्या	मेलकचिह्नम् (H)	उच्चपक्षाणां संख्या	मेलकचिह्नम् (H)	निम्नपक्षाणां संख्या
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	27	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	32
70		33		37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

ध्यानं ददतु यत् यदा भवान् उत्क्षेपणस्य संख्यायाम् अधिकाधिकं वृद्धिं करोति तदाउच्चपक्षस्य संख्या तथा निम्नपक्षस्य संख्या अधिकाधिका निकटे आगच्छति।

एवमेव एकेन अक्षेन सह अपि भवितुम् अर्हति यदा तम् एकस्मिन् बृहत् संख्यायां क्षिपन्ति। षड् परिणामेषु प्रत्येकस्य संख्या प्रायः समानः भवति।

एतादृश्यां स्थितौ वयं कथयितुं शक्नुमः यत् प्रयोगस्य विभिन्नपरिणामः सम-सम्भावितः अथवा समप्रायिकः भवति। अस्य अर्थः अयमेव यत् सर्वेषु प्रत्येकपरिणामस्य संयोगः एकः एव।



5.5.3 संयोगस्य प्रायिकतया सह योगः

एकस्य पणस्य एकबारम् उत्क्षेपणे विचारं कुर्वन्तु। परिणामः कः अस्ति ? अत्र केवलं परिणामद्वयं वर्त्तते - उच्चपक्षः निम्नपक्षश्च। उभावपि परिणामौ समप्रायिकौ स्तः। एकम् उच्चपक्षं प्राप्तुं सम्भावना परिणामद्वयेषु 1 अर्थात् $\frac{1}{2}$ अस्ति। अपरशब्देषु वयं कथयितुम् अर्हामः यत् एकं उच्चतमं प्राप्तुं प्रायिकता = अस्ति। एकं निम्नपक्षं प्राप्तुं प्रायिकता का वर्त्तते। अधुना एकाक्षस्य उत्क्षेपणस्य उदाहरणे विचारं कुर्वन्तु यस्य फलकेषु 1, 2, 3, 4, 5, 6 (एकस्मिन् फलके एका संख्या) अङ्कितः अस्ति। यदि भवन्तः एतम् एकबारम् उत्क्षेपयिष्यन्ति तर्हि परिणामः कः भविष्यति ?

परिणामाः सन्ति - 1, 2, 3, 4, 5, 6। एवमेव अत्र षड् समप्रायिक-परिणामाः सन्ति। परिणामः 2 इति प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ?

एषा प्रायिकता अस्ति - $\frac{1}{6}$ ← 2 इति दीयमाना परिणामानां संख्या
← समप्रायिक-परिणामानां संख्या

संख्या 5 प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ? संख्या 7 प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ? संख्या 1 तः 6 संख्यां प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ?

5.5.4 घटनानां रूपे परिणामः

एकस्य प्रयोगस्य प्रत्येकं परिणामात् उत परिणामसङ्ग्रहात् एका घटना भवति। उदाहरणार्थम् एकं पणम् उत्क्षेपणप्रयोगे एकस्य उच्चपक्षस्य प्राप्तिः एका घटना अस्ति तथा एकस्य निम्नपक्षस्य प्राप्तिः अपि एका घटना अस्ति। एकस्य अक्षस्य उत्क्षेपणपरिस्थितौ 1, 2, 3, 4, 5, 6 परिणामेषु प्रत्येकस्य परिणामस्य प्राप्तिः एका घटना अस्ति।

किम् एकस्याः समसंख्यायाः प्राप्तिः एका घटना अस्ति ? यतो हिसम संख्या 2, 4, अथवा 6 भवितुम् अर्हति अतएव एकस्याः समसंख्यायाः प्राप्तिः अपि एका घटना अस्ति। एकां समसंख्यां प्राप्तुं प्रायिकता का भविष्यति ?

एषा प्रायिकता अस्ति - $\frac{3}{6}$ ← तेषां परिणामानां संख्या या घटनां निर्माति।
← प्रयोग-परिणामानां सम्पूर्णा-संख्या

उदाहरणम् 3 एकस्मिन् स्यूते 4 रक्तकन्दुकाः अथ 2 पीतकन्दुकौ स्तः । (एते कन्दुकाः वर्णातिरिक्ताः सर्वप्रकारतः सादृश्याः एव अर्थात् सर्वसमाः सन्ति ।) स्यूतान्तात् अदृष्ट्वा एव एकं कन्दुकं बहिः निष्कासयति । एकं रक्तकन्दुकं प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ?

किम् एतत् एकं पीतं कन्दुकं प्राप्तुं प्रायिकतातः अधिकम् अस्ति उत न्यूनम् ?

समाधानम् - अत्र घटनायाः सम्पूर्णपरिणामाः (4 + 2= 6) सन्ति ।

रक्तकन्दुकं प्राप्तुं 4 परिणामः अस्ति । (कथम् ?)

अतः रक्तं कन्दुकं प्राप्तकरणस्य प्रायिकता $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ अस्ति ।

एवमेव पीतकन्दुकं प्राप्तकरणस्य प्रायिकता $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ अस्ति । (कथम् ?)

अतः रक्तकन्दुकं प्राप्तकरणस्य प्रायिकता पीतकन्दुकं प्राप्तकरणस्य प्रायिकतातः अधिका अस्ति ।

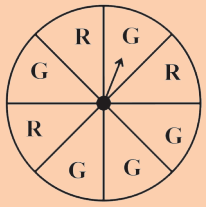
प्रयासं करोतु

1. स्वीकुर्वन्तु यत् भवन्तः चक्रं परिभ्राम्यन्ति (आकृतिः 5.11) ।

(i) अस्मिन् चक्रे एकस्य हरितत्रिज्यखण्डस्य प्राप्तपरिणामानां संख्यां तथा एकस्य हरित त्रिज्यखण्डस्य अप्राप्तपरिणामानां संख्यां लिखन्तु ।

(ii) एकस्य हरितत्रिज्यखण्ड-प्राप्तकरणस्य प्रायिकतां जानन्तु ।

(iii) एकस्य हरितत्रिज्यखण्ड-अप्राप्तकरणस्य प्रायिकतां जानन्तु ।



आकृतिः 5.11

5.5.5 वास्तविक जीवनेन सह सम्बन्धितः संयोगः प्रायिकता च

वयं तस्य संयोगस्य विषये वार्तां कृतवन्तः यस्यां केवलं तस्मिन् दिने एव वर्षा जाता यदा वयं वर्षत्रं नीत्वा न गतवन्तः । भवन्तः प्रायिकतायाः पदेषु संयोगविषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति स्म । किम् एतत् वर्षर्तोः 10 दिनेषु 1 दिने भवितुम् अर्हति स्म ।

तदा वर्षायाः प्रायिकता $\frac{1}{10}$ अस्ति । वर्षा न भविष्यति इत्यस्य $\frac{9}{10}$ प्रायिकता अस्ति ।

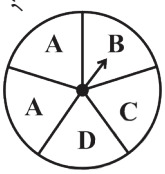
(एतां कल्पनां कुर्वन् यत् कश्मिंश्चित् दिने वर्षा भविष्यति न भविष्यति वा इति सम्भावितः अथवा समप्रायिकः अस्ति ।) वास्तविकजीवनस्य विभिन्न-स्थितिषु प्रायिकतायाः प्रयोगः भवति ।

1. एकस्य बृहत् समूहस्य अभिलक्षणं विशेषतां वा तस्य समूहस्य एकस्य लघु भागस्य प्रयोगं कुर्वन्तः जानन्तु । उदाहरणार्थम् - निर्वाचनकाले अनुमानित-मतदानं क्रियते । अस्मिन् सम्पूर्णक्षेत्रेषु बण्टितकेन्द्रेषु यदृच्छरूपेण (कमपि पूर्वाग्रहं विना) कञ्चित् केन्द्रं चित्वा मतदानार्थम् आगतात् जनात् एतत् पृच्छयते यत् ते कस्मै मतदानं कृतवन्तः । एतेन प्रत्येकप्रत्याशिनां जयस्य सम्भावनायाः अनुमानं भवति तथा अस्मिन् आधारेणैव प्रागुक्तयः भवन्ति ।
2. ऋतुविभागः अनेकवर्षाणां गणनाप्रवृत्तिं दृष्ट्वा ऋतोः विषये प्रागुक्तिं वदति ।

प्रश्नावली 5.3

1. एतेषु प्रयोगेषु भवन्तः यं परिणामं द्रष्टुं शक्नुवन्ति तान् लिखन्तु।

(a) चक्रभ्रामणम्



(b) पणद्वयं सहैव उत्क्षेपणम्

2. यदा एकस्य पणस्य उत्क्षेपणं भवति तदा निम्नलिखितप्रत्येकघटनातः प्राप्तपरिणामं लिखन्तु।

(a) एका अभाज्यसंख्या (b) एका अभाज्यसंख्या न

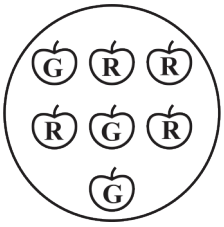
(a) 5 तः बृहत् एका संख्या (b) 5 तः बृहत् संख्या न

3. जानन्तु -

(a) (1 (a)प्रश्ने) सूचकस्य D इत्यस्मिन् स्थगनस्य प्रायिकता।

(b) सम्यक् प्रकारेण मेलितं 52 अक्षपत्रस्य एकस्मात्समूहात् 1 इक्कापत्रंस्वीकरणस्य प्रायिकता।

(c) एकं रक्तसेवफलं प्राप्तकरणस्य प्रायिकता (दत्त-आकृतितः पश्यन्तु)।



4. 10 पृथक् चिटिकासु 1 तः 10 पर्यन्तं संख्या लिखिता वर्त्तते (एकासु चिटिकासु) ताम् एकस्यां मञ्जूषायां संस्थाप्य सम्यक् प्रकारेण मेलनं भवति। मञ्जूषातः एकां चिटिकाम् अदृष्ट्वा एव बहिः निष्कासयति। निम्नलिखितानां प्रायिकता का भविष्यति ?

(i) संख्या 6 इति स्वीकरणीया।

(ii) 6 तः लघ्वी एका संख्या स्वीकरणीया।

(iii) 6 तः बृहत् एका संख्या स्वीकरणीया।

(iv) 1 अङ्कस्य एका संख्या स्वीकरणीया।

5. यदि भवतां पार्श्वे 3 हरितत्रिज्यखण्डीयं 1 नीलत्रिज्यखण्डीयं तथा 1 रक्तत्रिज्यखण्डीयम् एकं भ्रमणशीलचक्रम् अस्ति तर्हि एकं त्रिज्यखण्डं प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति ? एतादृशं त्रिज्यखण्डं प्राप्तुं प्रायिकता का अस्ति यः नीलः न भवेत् ?

6. 2 संख्यात्मके प्रश्ने दत्तघटनायाः प्रायिकतां जानन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. अस्माकं पार्श्वे अधिकतया उपलब्धा गणना या असंघटितरूपे भवति या यथाप्राप्त-गणना इति उच्यते।
2. कस्याः अपि गणनातः अर्थपूर्णं निष्कर्षं ज्ञातुं अस्माकं तां क्रमबद्धरूपे संघटितुम् आवश्यकता भवति।
3. निरन्तरता तां संख्यां प्रदर्शयति या यति बारं एकस्यां प्रविष्टगणनायाम् आगच्छति।
4. यथा प्राप्तगणनानां समूहं निर्मातुं शक्नुवन्ति तथा तं क्रमबद्धप्रकारेण अपि वर्गीकृत-निरन्तरता-बण्टन रूपे प्रस्तोतुं शक्नुवन्ति।
5. वर्गीकृतगणनाम् आयतचित्रस्य प्रयोगं कुर्वन् प्रदर्शितुं शक्नुवन्ति। आयतचित्रम् एकप्रकारकं दण्डालेखनम् अस्ति यस्मिन् क्षैतिजाक्षे वर्गान्तरालान् दर्शितुं शक्नुवन्ति तथा दण्डानाम् औन्नत्यं वर्गान्तरालानां निरन्तरतां प्रदर्शयति। सहैव दण्डानां मध्ये काचित् रिक्तता न भवति यतो हि वर्गान्तरालानां मध्ये काऽपि रिक्तता नास्ति।
6. गणनां वृत्तालेखानाम् अथवा पाईचित्राणाम् उपयोगं कृत्वा प्रस्तोतुं शक्नुवन्ति। एकः वृत्तालेखः तस्य सम्पूर्णभागेषु सम्बन्धं प्रदर्शयति।
7. कतिचन प्रयोगाः एतादृशाः भवन्ति येषु परिणामानाम् आगमनस्य संयोगः समानः एव भवति।
8. एकः यदृच्छप्रयोगः सः प्रयोगः अस्ति यस्मिन् परिणामानां सम्यक् प्रागुक्तिं पूर्वतः न कथयितुं शक्यते।
9. कस्यापि प्रयोगस्य परिणामः समसम्भावितः अथवा समप्रायिकः उच्यते यदि तेषाम् आगमनस्य संयोगः समानः भवेत्।
10. एकस्याः घटनायाः प्रायिकता $= \frac{\text{घटनानिर्माणपरिणामानांसंख्या}}{\text{प्रयोगस्यपरिणामानांसम्पूर्णासंख्या}}$
    यदा परिणामः समप्रायिकः स्यात्।
11. कस्यापि प्रयोगस्य एकस्मात् अथवा अधिकपरिणामात् एका घटना भवति।
12. संयोगः प्रायिकता च वास्तविक-जीवनेन सह सम्बद्धा अस्ति।

नोट

अध्यायः 6

वर्गः वर्गमूलञ्च

6.1 भूमिका

भवन्तः जानन्ति यत् वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः × भुजः (यत्र भुजः इत्यस्य अर्थः भुजस्य औन्नत्यम्) भवति।
निम्नसारण्याः अध्ययनं कुर्वन्तु -

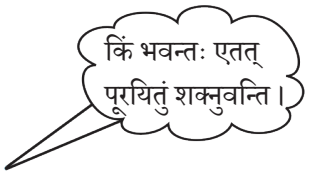
वर्गस्य भुजः (cm इत्यस्मिन्)	वर्गस्य क्षेत्रफलम् (cm^2 इत्यस्मिन्)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 संख्यासु तथा एवमेव अपरसंख्यासु किं विशिष्टत्वम् ? यतो हि 4 इति $2 \times 2 = 4 = 2^2$, 9 इति $3 \times 3 = 9 = 3^2$ रूपे व्यक्तं कर्तुं शक्नुमः अतः वयं प्राप्नुमः यत् एतादृशसंख्यां तस्याः संख्यायाः गुणनफलरूपे व्यक्तं कर्तुं शक्नुमः। एतादृशी संख्या यथा 1, 4, 9, 16, 25 ..... इति वर्गसंख्या उच्यते।

साधारणतया यदि एका प्राकृतसंख्या m इति n^2 इत्यनेन व्यक्तं भवति यत्र n अपि एका प्राकृतसंख्या अस्ति तदा m अपि एका वर्गसंख्या अस्ति। किं 32 इति एका वर्गसंख्या अस्ति ?

वयं जानीमः यत् 5^2=25 तथा 6^2 =36 भवति। यदि 32 इति एका वर्गसंख्या अस्ति तर्हि एतत् एकस्याः प्राकृत-संख्यायाः वर्गः भवेत् या 5 तथा 6 मध्ये भवेत् परन्तु अत्र 5 तथा 6 मध्ये काऽपि प्राकृतसंख्या नास्ति। निम्नसंख्यानाम् अथ तासां वर्गाणां विषये विचारं कुर्वन्तु।

संख्या	वर्गः
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	.....
7	.....
8	.....
9	.....
10	.....



उपरोक्त-सारणी माध्यमेन किं भवन्तः 1 तः 100 इत्यनयोः मध्ये वर्गसंख्यां लेखितुं शक्नुवन्ति ? किं 100 संख्या पर्यन्तं काऽपि प्राकृतवर्गसंख्या परित्यक्ता ? अधुना भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् अवशिष्टाः सर्वाः संख्याः वर्गसंख्याः न सन्ति । 1, 4, 9, 16 संख्याः वर्गसंख्याः सन्ति । एताः संख्याः पूर्णवर्गसंख्याः अपि उच्यन्ते ।

प्रयासं करोतु

1. प्रदत्तसंख्यासु मध्ये पूर्णवर्गसंख्यां जानन्तु -
   30 तथा 40 (ii) 50 तथा 60

6.2 वर्गसंख्यानां गुणधर्मः

निम्नलिखितसारण्यां 1 तः 20 पर्यन्तं वर्गसंख्यानां प्रदर्शनम् अस्ति ।

संख्या	वर्गः	संख्या	वर्गः
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

उपरोक्तसारण्यां वर्गसंख्यानाम् अध्ययनं कुर्वन्तु । वर्गसंख्यानाम् अन्तिमः अङ्कः (अर्थात् वर्गसंख्यानाम् एककस्थानस्य अङ्कः) किम् अस्ति ? एताः सर्वाः संख्याः एककस्य स्थाने 0, 1, 4, 5, 6 अथवा 9 इत्यस्मिन् समाप्ताः भवन्ति । एतासु कस्याः अपि संख्यायाः एककस्य स्थाने 2, 3, 7, अथवा 8 नागच्छति । किं वयं

कथयितुं शक्नुमः यत् यदि एका संख्या 0, 1, 4, 5, 6 अथवा 9 इत्यस्मिन् समाप्ताः भवन्ति तर्हि सा एका वर्गसंख्या भविष्यति ? एतस्मिन् विषयेचिन्तयन्तु ।

प्रयासं करोतु

1. किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् निम्नसंख्याः पूर्णवर्गसंख्याः सन्ति ? वयं कथं जानीमः ?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1096 (vi) 2061
   पञ्च एतादृशीं संख्यां लिखन्तु यासाम् एककस्थानं दृष्ट्वा भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् एताः संख्याः वर्गसंख्याः न सन्ति ।
2. पञ्च एतादृशीं संख्यां लिखन्तु यासाम् एककस्थानं दृष्ट्वा भवन्तः न ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् ताः संख्याः वर्गसंख्याः सन्ति न वा ।

- निम्नसारण्यां काञ्चन संख्यां तथा तस्याः वर्गाणाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा उभयोः एककस्थास्य निरीक्षणं कुर्वन्तु ।

सारणी 1

संख्या	वर्गः	संख्या	वर्गः	संख्या	वर्गः
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

निम्नलिखितवर्गसंख्याः 1 इत्यस्मिने समाप्ताः भवन्ति -

वर्गः	अङ्कः
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

प्रयासं करोतु

123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2 इत्येषु का संख्या 1 इति अङ्केऽस्मिन् समाप्ता भविष्यति ?

एतदतिरिच्य अग्रिमे द्वे संख्ये लिखन्तु या 1 तथा तस्याः सङ्गतव्याख्यासु समाप्ता भवति ।

भवन्तः पश्यन्ति यत् यदि एकसंख्यायाः स्थाने 1 अथवा 9 आगच्छति तदा अस्याः वर्गसंख्यायाः अन्ते 1 आगच्छति ।

• अधुना 6 इत्यस्मिन् समाप्यमानायां संख्यायां विचारं कुर्वन्तु ।

वर्ग:	अङ्क:
16	4
36	6
196	14
256	16

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितेषु कासां संख्यानां एककस्थाने 6 अङ्क: भविष्यति ?

(i) 19^2, (ii) 24^2, (iii) 26^2,
(iv) 36^2, (v) 34^2

वयं पश्याम: यत् यदा काऽपि वर्गसंख्या 6 इत्यस्मिन् समाप्ता भवति तदा सा यस्या: संख्याया: वर्ग: अस्ति तस्या: एकक-अङ्क: 4 भविष्यति अथवा 6 ।

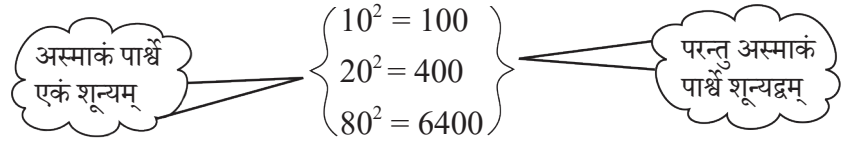
किं भवन्त: एवमेव कमपि इतोऽपि नियमं सारण्यां लिखितसंख्यानां तथा तस्या: वर्गाणाम् अवलोकनेन ज्ञातुं शक्नुवन्ति (सारणी 1) ?

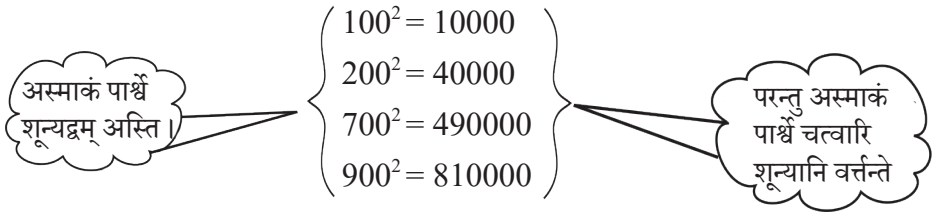
प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यानां वर्गे कृते सति तासाम् एककस्थाने किं भविष्यति ?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

• निम्नलिखितसंख्यासु तथा तासां वर्गेषु विचारं कुर्वन्तु -





यदि एकसंख्याया: अन्ते शून्यत्रयं भवेत् तर्हि तस्य वर्गे कति शून्यानि भविष्यन्ति ? किं भवन्त: संख्याया: अन्ते शून्यानां संख्यायां तथा तस्या: वर्गस्य अन्ते शून्यायां संख्यायां ध्यानं दत्तवन्त: ? किं भवन्त: एतत् वक्तुं शक्नुवन्ति यत् वर्गसंख्यानाम् अन्ते शून्यानां संख्या केवलं सम संख्या भवति ?

• संख्याया: तथा तस्या: वर्गाणां कृते सारणीं 1 इति पश्यन्तु ।

समसंख्यानां वर्गाणां तथा विषमसंख्यानां वर्गाणां विषये भवन्त: किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखितेषु कस्या: संख्याया: वर्ग: विषमसंख्या अथवा समसंख्या भविष्यति कथम् ?

(i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

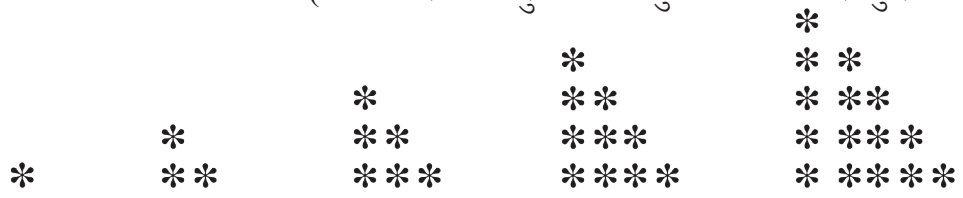
2. निम्नलिखितसंख्यानां वर्गेषु शून्यानां संख्या किं भविष्यति ?

(i) 60 (ii) 400

6.3 इतोऽपि अन्यानि रुचिकरप्रतिरूपाणि

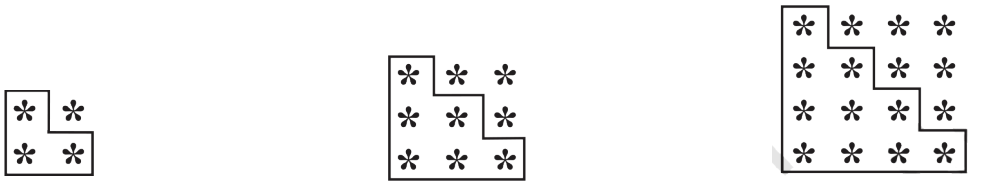
1. त्रिकोणीय-संख्यानां संयुक्तता-

किं भवन्तः त्रिकोणीयसंख्यां (संख्याः यस्याः बिन्दुप्रतिरूपं त्रिभुजानां रूपे व्यवस्थितुं शक्यते) स्मरन्ति ?



1 3 6 10 15

यदि वयं क्रमागतं त्रिभुजीयसंख्याद्वयं परस्परं योजयामः तदा वयं एकां वर्गसंख्यां प्राप्नुमः यथा -



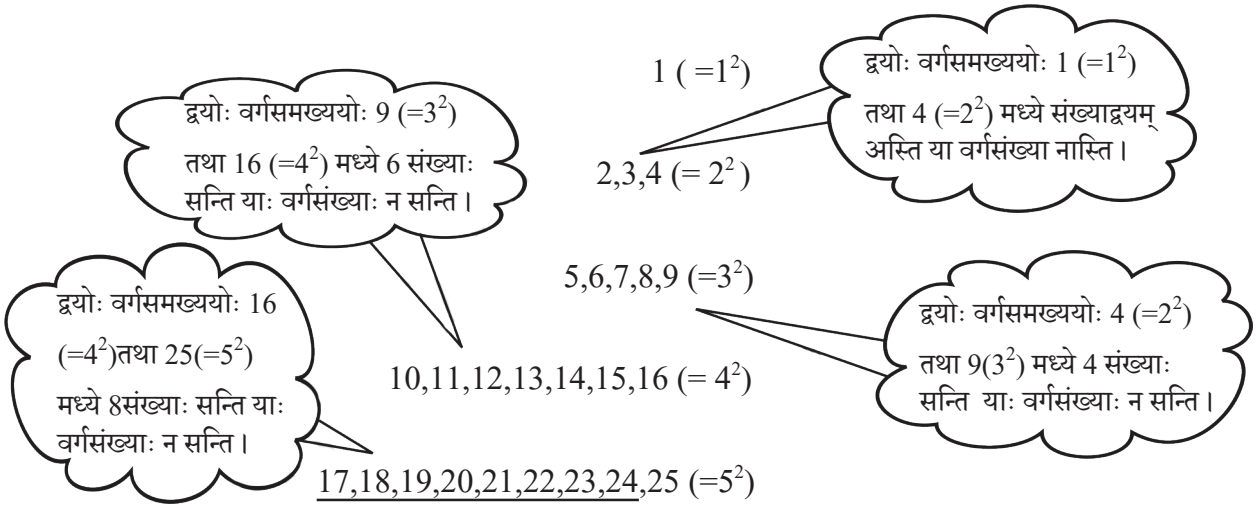
$1 + 3 = 4$
$= 2^2$

$3 + 6 = 9$
$= 2^2$

$6 + 10 = 16$
$= 4^2$

2. वर्गसंख्यानां मध्यस्थाः संख्याः

अधुना वयं पश्यामः यत् किं वयं क्रमागतं वर्गसंख्याद्वयानां मध्ये किञ्चित् रुचिकरं प्रतिरूपं प्राप्तुं शक्नुमः ।



1^2 (=1) तथा 2^2 (=4) इत्यनयोः मध्ये 2 (अर्थात् 2×1) संख्याः 2,3 सन्ति याः वर्गसंख्याः न सन्ति ।

2^2 (=4) तथा 3^2 (=9) इत्यनयोः मध्ये 4 (अर्थात् 2×2) संख्याः 5, 6, 7, 8 सन्ति याः वर्गसंख्याः न सन्ति ।

अधुना $3^2 = 9$, $4^2 = 16$

अतः $4^2 - 3^2 = 16-9 = 7$

अत्र 9 ($= 3^2$) तथा 16 ($= 4^2$) इत्यनयोः मध्ये षड्संख्याः 10, 11, 12, 13, 14, 15 सन्ति याः वर्गसंख्याः न सन्ति तासां संख्याः उभयोः वर्गयोः अन्तरात् 1 न्यूनतायां सन्ति ।

अस्माकं पार्श्वे $4^2 = 16$ तथा $5^2 = 25$

अतः $5^2-4^2 =9$

अत्र 16 ($=4^2$) तथा 25 ($=5^2$) इत्यनयोः मध्ये 17,18, ... , 24 अष्टसंख्याः सन्ति याः वर्गसंख्याः न सन्ति। तासां संख्याः उभयोः वर्गयोः अन्तरात् 1 न्यूनतायां सन्ति।

7^2 तथा6^2 इति पश्यन्तु। किं त्वं कथयितुं शक्नोषि यत् 7^2 तथा 6^2 इत्यनयोः मध्ये कति संख्याः सन्ति ?

यदि वयं काश्चित् प्राकृतसंख्याः n तथा (n+1) गृह्णामः तदा

$$(n+1)^2- n^2= (n^2+ 2n+1)- n^2=2n+1$$

वयं n^2 तथा $(n+1)^2$ इत्यनयोः मध्ये 2n संख्यां प्राप्नुमः या उभयोः वर्गसंख्ययोः अन्तरात् 1 न्यूनता अस्ति।

व्यापकरूपेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् उभयोः वर्गसंख्ययोः n तथा (n+1) मध्ये 2n संख्याः सन्ति याः वर्गसंख्याः न सन्ति। परीक्षणाय n=5, n=6 गृह्णन्तु तथा एतत् सत्यापितं कुर्वन्तु।

प्रयासं करोतु

1. 9^2 तथा 10^2 इत्यनयोः मध्ये कति प्राकृतसंख्याः सन्ति ? 11^2 तथा 12^2 इत्यनयोः मध्ये अपि प्राकृतसंख्यानां संख्यां कथयन्तु।
2. निम्नलिखितसंख्यानां युग्ममध्यस्य संख्यां ज्ञापयन्तु याः वर्गसंख्याः न सन्ति।
   100^2 तथा 101^2 (ii) 90^2 तथा 91^2 (iii) 1000^2 तथा 1001^2

3. विषमसंख्यानां योगः

निम्ने विचारं कुर्वन्तु।

1 [एका विषमा संख्या]	$= 1=1^2$
1 + 3[पूर्वं विषमासंख्याद्वयानां योगः]	$= 4=2^2$
1 + 3 + 5 [पूर्वं विषमासंख्यात्रयाणां योगः]	$= 9=3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [....]	$= 16=4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25=5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36=6^2$

अतः वयं कथयितुं शक्नुमः यत् पूर्वं n विषमप्राकृतसंख्यानां योगः n^2 अस्ति।

एतत् भिन्नदृष्ट्या दर्शनेन वयं वक्तुं शक्नुमः यत् यदि एका संख्या वर्गसंख्या अस्ति तर्हि सा 1 इत्यतः प्रारभ्यमाणः क्रमागतः विषमसंख्यानां योगः अस्ति।

अधुना एतासु संख्यासु विचारं कुर्वन्तु याः पूर्णवर्गसंख्याः न सन्ति यथा 2, 3, 5, 6, ...। किं भवन्तः एताः संख्याः 1 इत्यतः प्रारभ्य समेषां विषमप्राकृतसंख्यानां योगं क्रमागतं लेखितुं शक्नुवन्ति।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् एतां संख्या अनेन प्रकारेण लेखितुं न शक्यते। 25 संख्यां गृह्णन्तु तथा एतासु 1, 3, 5, 7, 9, ... इति क्रमेण व्यवकलनं कुर्वन्तु।

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$

(iv) $16 - 7 = 9$ (v) $9 - 9 = 0$

अर्थात् अत्र $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ अस्ति अतः 25 एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।

इदानीं पुनः अपरां संख्यां 38 इति गृह्णन्तु तथा पुनः यथा ऊपरि कृतवान् तथैव अत्र कुर्वन्तु।

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$

(iv) $29 - 7 = 22$ (v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$

(vii) $2 - 13 = -11$

अतः एतत् प्रदर्शयति यत् 38 इति 1 इत्यतः प्रारभ्यमाणानां क्रमागतविषमसंख्यानां रूपे वयं लेखितुं न शक्नुमः तथा 38 एका पूर्णवर्गसंख्या न सन्ति।

अतः वयम् एतत् अपि कथयितुं शक्नुमः यत् यदि काऽपि प्राकृत-संख्या 1 इत्यतः प्रारभ्यमाणानां क्रमागतविषमसंख्यानां रूपे व्यक्तं भवितुं न शक्नोति तर्हि सा संख्या पूर्णवर्गसंख्या न अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु -

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यासु प्रत्येकपूर्णवर्गसंख्याः सन्ति न वा ?

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

एका संख्या पूर्णा अस्ति न वा एतत् ज्ञातुम् अस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्वन्तु।

4. क्रमागतप्राकृत-संख्यानां योगः

निम्नलिखिते विचारं कुर्वन्तु -

प्रथमसंख्या $= \frac{3^2 - 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

द्वितीयसंख्या $= \frac{3^2 + 1}{2}$

अहो कस्यापि विषमसंख्यां क्रमागतं धनात्मकपूर्णाङ्कानां योगरूपे व्यक्तुं शक्यते।

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखितसंख्यां द्विक्रमागतपूर्णाङ्कानां योगरूपे लिखन्तु -
   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2
2. किं भवन्तः विचारयन्ति यत् अस्य विलोमः सत्यम् अस्ति अर्थात् किं द्विक्रमागत धनात्मकपूर्णाङ्कानां योगः एकः पूर्णः वर्गः भवति? स्वकीय उत्तरपक्षे स्वकीय एकम् उदाहरणं ददतु।

5. द्विक्रमागतसमविषम-प्राकृतसंख्यानां गुणनफलम्

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

एवमेव $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

अतः $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

एवमेव $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

अतः सामान्यतया वयं कथयितुं शक्नुमः यत् $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. वर्गसंख्यानां किञ्चित् प्रतिरूपम्

संख्यानां वर्गम् अवलोकयन्तु 1, 11, 111 ..... इत्यादिः। एते एकं सुन्दरं प्रतिरूपं प्रददति।

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$11111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

अन्यानि रोचकप्रतिरूपाणि

$7^2=49$

$67^2=4489$

$667^2=444889$

$6667^2=44448889$

$66667^2=4444488889$

$666667^2=444444888889$

प्रयासं करोतु

उपरोक्तप्रतिरूपाणाम् उपयोगं कृत्वा वर्गसंख्यां लिखन्तु -

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

प्रयासं करोतु

उपरोक्तप्रतिरूपाणाम् उपयोगं कृत्वा किं भवन्तः निम्नलिखितसंख्यानां वर्गं ज्ञातुं शक्नुवन्ति -

6666667^2 (ii) 66666667^2

एवं कथं भवति एतत् ज्ञानं भवतां कृते मनोरंजनपूर्वकं भवितुम् अर्हति। भवतां कृते इदृशानां प्रश्नानाम् अन्वेषणं तथा तेषां विषये विचारः रुचिकरः भविष्यति। निःसन्देह एतादृशानि उत्तराणि पश्चात् मिलेयुः।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखितसंख्यानां वर्गाणाम् एककस्य अङ्कः कः भविष्यति ?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853

(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880

(ix) 12796 (x) 55555

2. निम्नलिखितसंख्याः स्पष्टरूपेण पूर्णवर्गासंख्याः न सन्ति एतस्य कारणं ददतु ?

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222

(v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. निम्नलिखितसंख्यासु कस्याः संख्यायाः वर्गः विषमसंख्या भविष्यति ?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. निम्नप्रतिरूपाणाम् अवलोकनं कुर्वन्तु तथा रिक्तस्थानं पूरयन्तु ?

$11^2=121$

$101^2=10201$

$1001^2=1002001$

$100001^2=1\ldots\ldots 2 \ldots\ldots 1$

$10000001^2= \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. निम्नप्रतिरूपाणाम् अवलोकनं कुर्वन्तु तथा रिक्तस्थानं पूरयन्तु ?

11^2=1 21

101^2=1 0 2 0 1

10101^2 = 102030201

1010101^2= .....

.....^{2}= 10203040504030201

6. प्रदत्तप्रतिरूपाणाम् उपयोगं कृत्वा लुप्तसंख्यां प्राप्नुवन्तु ?

$1^2+ 2^2+ 2^2= 3^2$

$2^2+ 3^2+ 6^2= 7^2$

$3^2+ 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2+ 5^2 + -^2= 21^2$

$5^2+ -^2+ 30^2 = 31^2$

$6^2+ 7^2+ -^2 = -^2$

प्रतिरूपं प्राप्नुवन्तु -
तृतीयसंख्या प्रथमातः द्वितीयातश्च सम्बन्धिता अस्ति कथम् ?
चतुर्थसंख्या तृतीयसंख्यातः सम्बन्धिता अस्ति कथम् ?

7. योगसङ्क्रियां विना एव योगफलं प्राप्नुवन्तु ?

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9

(ii) 1 + 3 + 5 +7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

(iii) 1 + 3 + 5 +7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) 49 इति 7 विषमसंख्यानां योगरूपे लिखन्तु ?

(ii) 121 इति 11 विषमसंख्यानां योगरूपे लिखन्तु ?

9. निम्नलिखितसंख्यानां वर्गमध्ये कति संख्याः सन्ति ?

12 तथा 13 (ii) 25 तथा 26 (iii) 99 तथा 100

6.4 संख्यानां वर्गं जानन्तु

लघु संख्याः यथा 3, 4, 5, 6, 7, ... इत्यादीनां वर्गज्ञानं सरलम् अस्ति परन्तु किं वयं 23 इत्यस्य वर्गः एतावता शीघ्रतया प्राप्तुं शक्नुमः ?

एतस्य उत्तरं एतावत् सरलं नास्ति तथा अस्माकं कृते 23 इति 23 इत्यनेन सह गुणनस्य आवश्यकता अस्ति।

एतत् प्राप्तुम् एकः उपायः अस्ति यः 23 × 23 इति गुणनं विना एव प्राप्यते।

वयं जानीमः यत् $23 = 20 + 3$

अतएव $23^2 = (20+ 3)^2 = 20\ (20+3)+3\ (20+3)$

$= 20^2 + 20 \times 3+3 \times 20 + 3^2$

$= 400+60+60+9=529$

उदाहरणम् 1 - निम्नलिखितसंख्यानां वर्गः गुणनं विना एव जानन्तु।

(i) 39 (ii) 42

समाधानम् - (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30\ (30+9)+9\ (30+9)$

$= 30^2 + 30 \times 9+9 \times 30 + 9^2$

$= 900+ 270+270+81=1521$

(ii) $42^2 = (40+2)^2 = 40(40+2)+2\ (40+2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

वर्गस्य अन्यानि प्रतिरूपाणि

निम्नप्रतिरूपं पश्यन्तु

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ शतकम्+25

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ शतकम्+25

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ शतकम्+25

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ शतकम्+25

अधुना किं भवन्तः 95 इत्यस्य वर्गः प्राप्तुं शक्यते ?

एकाम् ईदृशीं संख्यां गृह्णन्तु यस्याः एककस्थाने अङ्कः 5 भवेत् , अर्थात् a^2

$(5a)^2 = (10a+5)^2$

$= 10a\ (10a+5)+5\ (10a+5)$

$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$

$= 100a\ (a+1)+25$

$= a\ (a+1)$ शतकम्+25

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यानां वर्गं जानन्तु यासाम् एककाङ्कः 5 अस्ति।

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 पैथागोरीय त्रिकः

निम्नं गृह्णन्तु -

$$3^2 + 4^2 = 9+16 = 25 = 5^2$$

संख्या 3, 4, 5 इत्यस्य समूहं पैथागोरीय त्रिकः इति उच्यते। 6, 8, 10 अपि एकः पैथागोरीय त्रिकः अस्ति। एवमेव

$$6^2 + 8^2 = 36+64 = 100 = 10^2$$

पुनः अवलोकनं कुर्वन्तु यत् -

$5^2 + 12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$। एवमेव संख्याः 5, 12, 13 एतादृशः एव द्वितीयः त्रिकः अस्ति। किं भवन्तः एवमेव अन्यान् त्रिकान् प्राप्तुं शक्नुवन्ति?

कस्यापि प्राकृतसंख्यायाः $m > 1$ इत्यस्य कृते $(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$। अतः $2m$, m^2-1 तथा m^2+1 इति पैथागोरीय-त्रिकरूपे अस्ति। एतस्य रूपस्य उपयोगं कृत्वा इतोऽपि पैथागोरीय-त्रिकं जानन्तु।

उदाहरणम् 2 - एकं पैथागोरीय-त्रिकं लिखन्तु यस्य अति लघुसंख्या 8 भवेत्।

समाधानम् - साधारणतया $2m$, m^2-1 , m^2+1 इत्यनेन वयं पैथागोरीय-त्रिकं प्राप्तुं शक्नुमः।

पूर्वं वयं गृह्णामः $m^2-1=8$

अतः $m^2 = 8+1 = 9$

$m = 3$

अतएव $2m = 6$ तथा $m^2+1 = 10$

अतः 6, 8, 10 एकः त्रिकः अस्ति परन्तु 8 सर्वेभ्यः लघ्वी संख्या नास्ति।

अतः वयं गृह्णामः $2m=8$

तदा $m=4$

$m^2-1=16-1=15$

$m^2+1=16+1=17$

अतः 8, 15, 17 एकः ईदृशः त्रिकः अस्ति यत्र 8 सर्वेभ्यः लघ्वी संख्या अस्ति।

उदाहरणम् 3 - एकं पैथागोरीय-त्रिकं लिखन्तु यस्य एका संख्या 12 अस्ति।

समाधानम् - यदि वयं गृह्णामः $m^2-1=12$

तदा $m^2=12+1=13$

अत्र m इत्यस्य मानं पूर्णाङ्कः न भविष्यति।

अतः वयं प्रयत्नं कुर्मः यत् $m^2+1=12$ । पुनः $m^2=11$ यत् m इत्यस्य कृते पूर्णाङ्कं मानं न दास्यति।

अतः वयं गृह्णामः $2m=12$

तदा $m=6$

एवमेव $m^2-1=36-1=35$ तथा $m^2+1=36+1$ 37

अतः आवश्यकः त्रिकः अस्ति 12, 35, 37

विशेषः अस्य रूपस्य उपयोगं कुर्वन् सर्वे पैथागोरीय-त्रिकं प्राप्तुं न शक्नुवन्ति। उदाहरणार्थं द्वितीये त्रिके 5, 12, 13 संख्यासु अपि 12 एकः सदस्यः अस्ति।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नसंख्यानां वर्गं जानन्तु -

   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93

   (v)71 (vi) 46

2. पैथागोरीय-त्रिकं लिखन्तु यस्य एकः सदस्यः अस्ति -

   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 वर्गमूलः

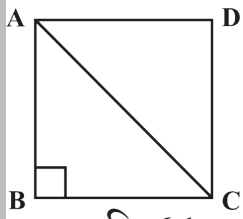
निम्नस्थितीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु -

(a) वर्गस्य क्षेत्रफलं $144cm^2$ अस्ति। वर्गस्य भुजः कः भविष्यति ?

वयं जानीमः यत् वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः^{2} भवति।

यदि वयं भुजस्य लम्बमानं 'a' इति गृह्णामः तदा $144 = a^2$ भुजस्य लम्बमानं ज्ञातुं आवश्यकम् अस्ति यत् एकाम् ईदृशीं संख्यां जानन्तु यस्याः वर्गः 144 अस्ति।

(b) एकः वर्गः यस्य भुजः 8cm अस्ति। तस्य विकर्णस्य औन्नत्यं किं भविष्यति (चित्रसंख्या 6.1) ? एतस्य समाधानार्थं किं वयं पैथागोरीयप्रमेयस्य उपयोगं कर्त्तुं शक्नुमः ?



आकृतिः 6.1

वयं जानीमः $AB^2 + BC^2 = AC^2$

अर्थात् $8^2 + 8^2 = AC^2$

अथवा $64+64 = AC^2$

अथवा $128 = AC^2$

पुनः AC प्राप्तुं वयम् ईदृशीं संख्यां विचारयामः यस्याः वर्गः 128 भवेत्।

(c) एकस्मिन् समकोणत्रिभुजे कर्णः एकः भुजश्च क्रमशः 5 cm तथा 3 cm अस्ति। (चित्रसंख्या 6.2) किं भवन्तः तृतीयभुजं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

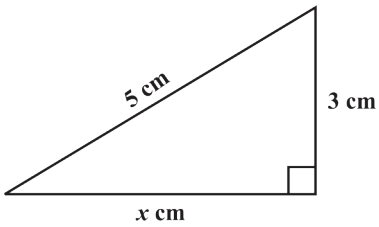
स्वीकुर्वन्तु यत् तृतीयभुजस्य औन्नत्यं x cm अस्ति।

पैथागोरीयप्रमेयस्य उपयोगेन $5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$

पुनः इत्यस्य मानं प्राप्तुम् अस्माकं कृते एकस्याः संख्यायाः आवश्यकता अस्ति यस्याः वर्गः 16 अस्ति। उपरोक्तासु सर्वासु स्थितिषु अस्माकं कृते एकस्याः संख्यायाः आवश्यकता अस्ति यस्याः वर्गः ज्ञातः भवेत् तथा सा संख्या वर्गमूलरूपेण ज्ञाता भवेत्।



आकृतिः 6.2

6.5.1 वर्गमूलस्य परिज्ञानम्

योगस्य विपरीत-सङ्क्रिया व्यवकलनम् अस्ति तथा गुणाकारस्य विपरीत-सङ्क्रिया भागाकारः अस्ति। एवमेव वर्गमूलप्राप्तिः अपि वर्गस्य विपरीत-सङ्क्रिया अस्ति।

वयं जानीमः $1^2 = 1$, अतः 1 इत्यस्य वर्गमूलः 1 अस्ति।

$2^2 = 4$, अतः 4 इत्यस्य वर्गमूलः 2 अस्ति।

$3^2 = 9$, अतः 9 इत्यस्य वर्गमूलः 3 अस्ति।

एवमेव $9^2 = 81$, तथा $(-9)^2 = 81$, वयं कथयितुं शक्नुमः यत् 81 इत्यस्य वर्गमूलं 9 तथा -9

प्रयासं करोतु

$11^2 = 121$. 121 इत्यस्य वर्गमूलं किम् अस्ति ?

$14^2 = 196$. 196 इत्यस्य वर्गमूलं किम् अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

$(-1)^2 = 1$. किं 1 इत्यस्य वर्गमूलम् अस्ति -1 ?

$(-2)^2 = 4$. किं 4इत्यस्य वर्गमूलम् अस्ति -2 ?

$(-9)^2 = 81$. किं 81 इत्यस्य वर्गमूलम् अस्ति -9 ?

उपरोक्तानुसारेण भवन्तः एतत् कथयितुं शक्नुवन्ति यत् कस्यापि पूर्णवर्गसंख्यायाः सम्मिल्य वर्गमूलद्वयम् अस्ति। अस्मिन् अध्याये वयं कस्यापि प्राकृत-संख्यायाः केवलं धनात्मकवर्गमूलम् एव गृह्णामः धनात्मकवर्गमूलसंख्यां √ सङ्केतेन व्यक्तीक्रियते।

उदाहरणार्थम् - $\sqrt{4}=2$ (-2 न); $\sqrt{9}=3$ (-3 न) इत्यादिः।

कथनम्	निष्कर्षः
$1^2=1$	$\sqrt{1}=1$
$2^2=4$	$\sqrt{4}=2$
$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$
$4^2=16$	$\sqrt{16}=4$
$5^2=25$	$\sqrt{25}=5$

कथनम्	निष्कर्षः
$6^2=36$	$\sqrt{36}=6$
$7^2=49$	$\sqrt{49}=7$
$8^2=64$	$\sqrt{64}=8$
$9^2=81$	$\sqrt{81}=9$
$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$

6.5.2 व्यवकलन-सङ्क्रिया द्वारा वर्गमूलस्य परिज्ञानम्

किं भवतां स्मरणे अस्ति यत् प्रथम n विषमप्राकृतसंख्यानां योगः n^2 अस्ति ? अतः प्रत्येकवर्गसंख्यां 1 इत्यतः प्रारभ्य क्रमागतप्राकृतसंख्यानां योगरूपे व्यक्तं कर्तुं शक्यते। $\sqrt{81}$ इति गृह्णन्तु -

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$
(iv) $72 - 7 = 65$ (v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$
(viii) $32 - 15 = 32$ (ix) $17 - 17 = 0$

संख्या 1 इत्यतः क्रमागतविषमसंख्यां 81 इत्यस्मिन् रूपे व्यवकलने सति 9 पदं 0 इत्यस्य प्राप्तिः भवति अतः $\sqrt{81}=9$। एतस्य नियमस्य उपयोगं कृत्वा किं भवन्तः 729 इत्यस्य वर्गमूलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? आम् परन्तु अस्मिन् बहुः अधिकः समयः लगति। अधुना वयं सरलरीत्या वर्गमूलं प्राप्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

प्रयासं करोतु

1 इत्यतः प्रारभ्यमाणां विषमसंख्यां मुहुर्मुहुः व्यवकलने सति प्राप्तनिम्नलिखितसंख्याः पूर्णवर्गाः सन्ति अथवा न यदि एताः संख्याः सन्ति तर्हि एषां वर्गमूलं जानन्तु।

(i) 121 (ii) 55 (iii) 36 (iv) 49 (v) 90

6.5.3 अभाज्य-गुणनखण्डेन वर्गमूलस्य परिज्ञानम्

निम्नसंख्यां तथा तस्याः वर्गम् अभाज्यगुणनखण्डरूपे लिखन्तु -

एकस्याः संख्यायाः अभाज्यगुणनखण्डनम्	अस्याः वर्गस्य अभाज्यगुणनखण्डनम्
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

6 इत्यस्य अभाज्यगुणनखण्डे 2 कति बारम् आयाति ? एकबारम्। 36 इत्यस्य अभाज्यगुणनखण्डे 2 कति बारम् आयाति ? द्विबारम्। एवमेव 6 तथा 36 इत्यस्मिन् 3 कति बारं तथा 8 एवं 64 इत्यस्मिन् 2 कति बारम् अस्ति ?

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् कस्याः अपि संख्यायाः वर्गस्य अभाज्यगुणनखण्डानां संख्या तस्याः संख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डानां संख्यायाः द्विगुणिता भवति। आगच्छन्तु वयं प्रदत्तवर्गसंख्यायाः 324 इत्यस्याः वर्गमूलं जास्यामः।

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

वयं जानीमः यत् 324 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डनम्

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

अभाज्य-गुणनखण्डस्य युग्मं निर्माणे सति वयं प्राप्नुमः

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

अतः $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

ए व मे व भवन्तः 256 इत्यस्य वर्गमूलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? 256 इत्यस्य गुणनखण्डः अस्ति।

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

अभाज्यगुणनखण्डे युग्मनिर्माणेन वयं प्राप्नुमः ?

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$

अतः $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

किं 48 एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति ?

वयं जानीमः $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

अत्र सम्पूर्णगुणनखण्डः युग्मे नास्ति अतः 48 एका पूर्णवर्गसंख्या नास्ति। कल्पनां कुर्वन्तु यत् वयं 48 इत्यस्य सर्वलघुगुणजं ज्ञातुम् इच्छामः यः एका पूर्णवर्गसंख्या भवेत्। एतत् कथं साधयामः ? 48 इत्यस्य अभाज्यगुणनखण्डस्य युग्मं निर्माणे सति वयं पश्यामः यत् केवलं 3 एका संख्या अस्ति या युग्मे भवितुं न शक्नोति अतः युग्मं पूरयितुं 3 इत्यनेन सह गुणाकारस्य आवश्यकता वर्त्तते।

अतः $48 \times 3 = 144$ एकः पूर्णः वर्गः अस्ति।

किं भवन्तः कथयितुं शक्नुवन्ति यत् 48 इति कया संख्यया भागाकारे कृते सति पूर्णवर्गसंख्यायाः प्राप्तिः भविष्यति ?

गुणजः 3 , युग्मे नास्ति। अतः वयं 48 इति 3 इत्यनेन भागाकारं कुर्मः तर्हि वयं

$48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ इति प्राप्स्यामः तथा इयं संख्या पूर्णवर्गः अपि अस्ति।

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

उदाहरणम् 4 - 6400 इत्यस्य वर्गमूलं जानन्तु ?

समाधानम् - लिखन्तु $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

अतः $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

2	90
3	45
3	15
	5

उदाहरणम् 5 - किं 90 एकः पूर्णवर्गः अस्ति ?

समाधानम् - वयं $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ स्थापयामः।

अभाज्य गुणनखण्डे 2 तथा 5 युग्मे न स्तः।

अतः 90 एका पूर्णवर्गसंख्या नास्ति। यां यथार्थरूपे वयम् इत्थम् अपि द्रष्टुं शक्नुमः यतो हि अस्यां केवलं 1 इत्येव शून्यम् अस्ति।

उदाहरणम् 6 - किं 2352 एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति ? यदि न तर्हि 2352 इत्यस्य अति लघुगुणजं प्राप्नुवन्तु यः पूर्णवर्गसंख्यारूपे भवेत् तथा नवसंख्यायाः वर्गमूलं जानन्तु।

समाधानम् - वयं जानीमः यत् $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$ अभाज्य गुणनखण्डानुसारेण 3 इत्यस्य युग्मः नास्ति अतः 2352 एकः पूर्णवर्गः नास्ति यदि 3 इत्यस्य एकं युग्मं निर्मामः तदा संख्या पूर्णवर्गः भविष्यति। अतः 2352 इति 3 इत्यनेन गुणाकारे सति वयं प्राप्स्यामः -

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

अधुना प्रत्येकम् अभाज्य-गुणनखण्डः युग्मे अस्ति। अतः $2352 \times 3 = 7056$ एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति तथा 2352 इत्यस्य अत्यन्तलघु-गुणजः 7056 अस्ति यः एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।

तथा $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

उदाहरणम् 7 - सर्वलघुसंख्यां प्राप्नुवन्तु यां 9408 इत्यनेन भागाकारे कृते सति भागफलम् एका पूर्णवर्गसंख्या भवेत्। तस्य भागफलस्य वर्गमूलं जानन्तु।

समाधानम् - $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$ यदि वयं 9408 इति 3 इत्यनेन भागाकरः यदा कुर्मः तदा

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ या एका पूर्णवर्गसंख्या अस्ति। (कथम् ?) अतः सर्वलघुवाञ्छिता संख्या 3 अस्ति।

तथा $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

उदाहरणम् 8 - सर्वलघुवर्गसंख्यां प्राप्नुवन्तु या प्रत्येकसंख्या 6, 9, तथा 15 इत्यनेन विभाजिता भवेत्।

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

समाधानम् - एतत् चरणद्वयोः समाधातुं शक्नुवन्ति। सर्वप्रथमं लघु-उभयनिष्ठं गुणजं जानन्तु तथा तदनन्तरम् आवश्यकं वर्गसंख्यां जानन्तु। सा सर्वा लघु संख्या यस्यां 6, 9, 15 इत्यासां भागाकारः भविष्यति एतासां ल.स. अस्ति। 6, 9 तथा 15 इत्येतासां ल.स. अस्ति $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$।

90 इत्यस्य अभाज्य गुणनखण्डनं $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$ अस्ति।

वयं पश्यामः यत् अभाज्य-गुणनखण्डस्य 2 तथा 5 इत्यस्य युग्मः न अस्ति। अतः 90 एका पूर्णवर्गसंख्या न अस्ति।

पूर्णवर्गसंख्यां प्राप्तुं 90 इत्यस्य प्रत्येकं गुणनखण्डः युग्मे भवेत् अतः 2 तथा 5 अङ्कयोः युग्मं निर्मातुं भविष्यति। अतएव 90 इति 2×5 अर्थात् 10 इत्यनेन गुणाकारः स्यात्। अतः सा वर्गसंख्या $90 \times 10 = 900$ अस्ति।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नलिखितसंख्यानां वर्गमूलं ज्ञातुम् एककाङ्कस्य का सम्भावना अस्ति ?

(i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025

2. गणनां विना एव तां संख्यां ज्ञापयन्तु या वास्तविकरूपे पूर्णवर्गे नास्ति।

(i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441

3. मुहुर्मुहुः व्यवकलनविधिना 100 तथा 169 इत्यस्य वर्गमूलं जानन्तु।

4. अभाज्य-गुणनखण्डविधिना निम्नसंख्यानां वर्गमूलं जानन्तु।

(i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096

(v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (vii) 9216

(viii) 529 (ix) 8100

5. निम्नलिखितसंख्यासु प्रत्येकस्मै तां सर्वलघुपूर्णसंख्यां ज्ञापयन्तु यस्याः एतां संख्यां गुणाकारे कृते सति एषा एका पूर्णवर्गसंख्या भवेत्। अस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः वर्गमूलम्अपि जानन्तु।

(i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028

(v) 1458 (vi) 768

6. निम्नलिखितसंख्यासु प्रत्येकस्मै तां सर्वलघुपूर्णसंख्यां ज्ञापयन्तु यस्याः एतां संख्यां भागाकारे कृते सति एषा एका पूर्णवर्गसंख्या भवेत्। अस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः वर्गमूलम् अपि जानन्तु।

(i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645

(v) 2800 (vi) 1620

7. एकस्मिन् विद्यालये VIII कक्ष्यायाः सर्वे विद्यार्थिनः प्रधानमन्त्रि-राष्ट्रिय- सहायककोषे 2401 रु. दानस्वरूपं दत्तवन्तः। प्रत्येकेन विद्यार्थिना तावदेव रुप्यकं दानस्वरूपे दत्तं यावन्तः कक्ष्यायां विद्यार्थिनः आसन्। कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्यां जानन्तु।

8. एकस्मिन् उद्याने 2025 पादपाः एवं वपनीयाः यस्मात् प्रत्येकं पङ्क्तौ तावन्तः पादपाः आगच्छेयुः यावती पङ्क्तिनां संख्या स्यात्। पङ्क्तिनां संख्या अथ प्रत्येक-पङ्क्तिसु पादपानां संख्यां जानन्तु।

9. एतादृशीं सर्वलघुसंख्यां जानन्तु या 4, 9 तथा 10 इत्यनेन विभाजिता भवेत्।

10. एतादृशीं सर्वलघुसंख्यां जानन्तु या प्रत्येकं 8, 15 तथा 20 इत्यनेन विभाजिता भवेत्।

6.5.4 भागफलविधिना वर्गमूलस्य परिज्ञानम्

यदा संख्या दीर्घा भवेत् तदा अभाज्यगुणनखण्डविधिना वर्गमूलस्य परिज्ञानं लम्बम् अथ कठिनं भवति। अस्याः समस्याः बहिः आगमनार्थं वयं दीर्घविभाजनविधेः प्रयोगं कुर्मः। एतदर्थम् अस्माकं कृते वर्गमूले अङ्कानां संख्यां ज्ञातुम् आवश्यकता अस्ति।

निम्नलिखितसारणीं पश्यन्तु -

संख्या	वर्गः	
10	100	या 3 अङ्कानाम् अतिलघु-पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।
31	961	या 3 अङ्कानाम् अतिदीर्घ-पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।
32	1024	या 4 अङ्कानाम् अतिलघु-पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।
99	9801	या 4 अङ्कानाम् अतिदीर्घ-पूर्णवर्गसंख्या अस्ति।

अतः वर्गमूले अङ्कानां संख्या विषये वयं किं कथयितुं शक्नुमः यदि एका पूर्णवर्गसंख्या 3 अङ्कानाम् उत 4 अङ्कानां भवेत् ?

वयं वक्तुं शक्नुमः यत् यदि एका पूर्णवर्गसंख्या 3 अङ्कानाम् उत 4 अङ्कानाम् अस्ति तदा अस्याः वर्गमूलं 2 अङ्कानां भविष्यति। किं भवन्तः अस्मान् 5 अथ 6 अङ्कीय संख्यायाः वर्गमूले अङ्कानां संख्यां ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति।

अतिलघु 3 अङ्कानां पूर्णवर्गसंख्या 100 अस्ति या संख्या 10 इत्यस्य वर्गः अस्ति तथा 3 अङ्कानां अति दीर्घपूर्णवर्गसंख्या 961 अस्ति या संख्या 31 इत्यस्य वर्गः अस्ति। अतिलघु 4 अङ्कानां पूर्णवर्गसंख्या 1024 अस्ति या संख्या 32 इत्यस्य वर्गः अस्ति तथा 4 अङ्कानां अति दीर्घपूर्णवर्गसंख्या 9801 अस्ति या संख्या 99 इत्यस्य वर्गः अस्ति।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

किं वयं कथयितुं पारयामः यत् एकस्यां पूर्णवर्गसंख्यायां यदि n अङ्कः अस्ति तर्हि तस्य वर्गमूले $\frac{n}{2}$ अङ्कः भविष्यति यदि n समः अस्ति अथवा $\frac{(n+1)}{2}$ भविष्यति यदि n विषमः अस्ति ?

निम्नविधिः कस्याः अपि संख्यायाः वर्गमूले अङ्कानां संख्यां ज्ञातुम् उपयोगीभविष्यति।

- 529 इत्यस्य वर्गमूलं ज्ञातुं निम्नलिखितचरणे विचारं कुर्वन्तु।

किं भवन्तः अस्याः संख्यायाः वर्गमूले अङ्कानां संख्यायाः अनुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

चरणः 1 एककस्थानात् प्रारभन् प्रत्येकं युग्मे बारचिह्नं संयोजयन्तु। यदि अङ्कानां संख्या विषमा अस्ति तदा वामपक्षे एकस्मिन् अङ्के बारचिह्नं संयोजयन्तु। 529 एवं लिख्यते।

चरणः 2 ताम् अतिदीर्घसंख्यां जानन्तु यस्याः वर्गः सर्वतः वामपक्षस्य बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यातः न्यूनः भवेत् उत समानः भवेत् ($2^2<5<3^2$)। सर्वतः वामपक्षस्य नीचैः भाज्येन (अत्र 5 इत्यनेन) सह भाजकरूपे भागफलरूपे च एतां संख्यां गृह्णन्तु। भागाकारं कुर्वन्तु तथा शेषफलं जानन्तु (अस्यां स्थितौ 1 अस्ति।)

```
    2
  ---
2 | 5 29
  - 4
  ---
    1
```

चरणः 3 अग्रिम बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यां शेषफलस्य दक्षभागे लिखन्तु। (अर्थात् अस्यां स्थितौ 29 अस्ति।) अतः अग्रिमः भाज्यः 129 भविष्यति।

चरणः 4 भाजकं द्विगुणितं कुर्वन्तु तथा एतम् एतस्य दक्षे रिक्तस्थानेन सह लिखन्तु।

```
    2
  ---
2 | 5 29
  - 4
  ---
  1 29
```

चरणः 5 रिक्तस्थानं पूरयितुं दीर्घसम्भाविताङ्कस्य अनुमानं कुर्वन्तु यः भागफले नवीनः अङ्कः भविष्यति तथा नवभाजकं नवभागफलेन साकं गुणाकारे कृते सति गुणनफलं भाज्यात् न्यूनः अथवा समानः अस्ति।

अस्यां स्थितौ $42\times2 = 84$

```
    2
  ---
2 | 5 29
  - 4
  ---
4_| 1 29
```

यतो हि $43\times3 = 129$, अतः शेषफलं प्राप्तुं नवीनम् अङ्कं 3 इति चिनुमः।

चरणः 6 यतो हि शेषफलं 0 अस्ति तथा प्रदत्तसंख्यासु एकोऽपि अङ्कः शेषः न अस्ति।

अतः $\sqrt{529} = 23$

```
    23
  ------
2 | 5 29
  - 4
  ------
43| 1 29
  -129
  ------
    0
```

- अधुना $\sqrt{4096}$ इति समाधानं कुर्वन्तु -

चरणः 1 एककस्थानात् प्रारभन् प्रत्येकयुग्मोपरि बारचिह्नं संयोजयन्तु ($\overline{40}\ \overline{96}$)।

चरणः 2 एकां बृहत्तमां संख्यां जानन्तु या सर्वतः वामपक्षस्य बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यातः न्यूना अथवा समाना स्यात् ($6^2 < 40 < 7^2$)। एतां संख्यां भाजकरूपे अथ वामपक्षस्य बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यां भाज्यरूपे गृह्णन्तु। भागाकारेण शेषफलं जानन्तु (अस्यां स्थितौ अर्थात् 4) जानन्तु।

```
    6
  ---
6 | 40 96
  - 36
  ---
    4
```

चरण: 3 अग्रिम बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यां (अर्थात् 96) शेषफलस्य दक्षभागे लिखन्तु। नवभाज्यः 496 भविष्यति।

चरण: 4 भाजकं द्विगुणितं कुर्वन्तु तथा एतम् एतस्य दक्षे रिक्तस्थाने लिखन्तु।

चरण: 5 रिक्तस्थानं पूरयितुं दीर्घसम्भाविताङ्कस्य अनुमानं कुर्वन्तु यः भागफले नवीनः अङ्कः भविष्यति तथा नवभाजकं नवभागफलेन साकं गुणाकारे कृते सति गुणनफलं भाज्यात् न्यूनः अथवा समानः भविष्यति। अस्यां स्थितौ वयं पश्यामः यत् $124\times4 = 496$ अतः भागफले नवीनः अङ्कः 4 अस्ति। शेषफलं जानन्तु।

चरण: 6 यतो हि शेषफलं 0 अस्ति तथा कमपि बारचिह्नं नास्ति अतः $\sqrt{4096}=64$ अस्ति।

संख्यायाः अनुमानम्

पूर्णवर्गसंख्यायाः वर्गमूले अङ्कानां संख्यां ज्ञातुं बारचिह्नस्य उपयोगं कुर्वन्तु।

$$\sqrt{529}=23 \text{ तथा } \sqrt{4096}=64$$

एतयोः उभयोः संख्ययोः 529 तथा 4096 इत्यस्मिन् बारचिह्नस्य 2 अस्ति तथा तयोः वर्गमूले अङ्कानां संख्या 2 अस्ति।

किं भवन्तः 14400 इत्यस्य वर्गमूले अङ्कानां संख्यां ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति। बारचिह्नं संयोजने वयं $\overline{1}\ \overline{44}\ \overline{00}$ इति प्राप्नुमः। यद्यपि अत्र बारचिह्नस्य संख्या 3 अस्ति। अतः वर्गमूलं 3 अङ्कस्य भविष्यति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यानां वर्गमूले अङ्कानां संख्याः गणनां विना जानन्तु

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

उदाहरणम् 9 वर्गमूलं जानन्तु (i) 729 (ii) 1296

समाधानम्

```
    27
  ------
2 | 7 29
  - 4
  ------
47| 329
  | 329
  ------
  |  0
  ------
```

अतएव $\sqrt{729}=27$

```
    36
  ------
3 | 12 96
  - 9
  ------
66| 396
  | 396
  ------
  |  0
  ------
```

अतएव $\sqrt{1296}=36$

```
    74
  ------
7 | 56 07
  - 49
  ------
144| 707
   -576
  ------
   | 131
  ------
```

उदाहरणम् 10 तामेव लघुतमसंख्यां जानन्तु यां 5607 इत्यस्मिन् व्यवकलने सति सा पूर्णवर्गसंख्या रूपे भवेत्।

समाधानम् आगच्छन्तु दीर्घविभाजनविधिना $\sqrt{5607}$ ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः। वयं 131 शेषफलं प्राप्नुमः। एतत् प्रदर्शयति यत् 74^2, 5607 इत्यतः 131 इति न्यूनम् अस्ति।

अर्थात् यदि वयं कस्याम् अपि संख्यायां तस्याः शेषफलं व्यवकलयामः तर्हि वयम् एकं पूर्णवर्गसंख्यां प्राप्नुमः। अतः वाञ्छितपूर्णसंख्या अस्ति 5607 - 131 = 5476 तथा $\sqrt{5476}$ =74

उदाहरणम् 11 चतुर्णाम् अङ्कानां बृहत्तमां संख्यां ज्ञापयन्तु या पूर्णवर्गरूपे भवेत्।

समाधानम् चतुर्णाम् अङ्कानां बृहत्तमा संख्या = 9999 अस्ति। वयं दीर्घविभाजनविधिना $\sqrt{9999}$ जानीमः। यस्याः शेषफलं 198 अस्ति। एतत् प्रदर्शयति यत् 99^2, 9999 इत्यतः 198 इति न्यूनं वर्त्तते।

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	− 81
189	1899
	− 1701
	198

अर्थात् यदि वयं कस्याम् अपि संख्यायां तस्याः शेषफलं व्यवकलयामः तर्हि वयम् एकं पूर्णवर्गसंख्यां प्राप्नुमः। अतः वाञ्छितपूर्णसंख्या अस्ति 9999 - 198 = 9801 तथा $\sqrt{9801}$ =99

उदाहरणम् 12 तामेव लघुतमसंख्यां जानन्तु यां 1300 इत्यस्मिन् योजने सति सा पूर्णवर्गसंख्या रूपे भवेत्। तस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः वर्गमूलम् अपि जानन्तु।

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	− 9
66	400
	− 396
	4

समाधानम् वयं दीर्घविभाजनविधिना $\sqrt{1300}$ जानीमः। अत्र शेषफलं 4 अस्ति। एतत् प्रदर्शयति यत् 36^2 <1300 अग्रिमा पूर्णसंख्या 37^2 =1369

अतः अभीष्ट संख्या 37^2-1300 =1369-1300 = 69

6.6 दशमलवस्य वर्गमूलम्

संख्या $\sqrt{17.64}$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

चरणः 1 दशमलवसंख्यायाः वर्गमूलं ज्ञातुं वयं पूर्णसंख्यायां सामान्यरूपेण बारचिह्नं योजयामः। (अर्थात् 17) दशमलवभागे अपि प्रथमं दशमलवस्थानात् प्रारभ्य बारचिह्नं योजयामः तथा सामान्यरूपेण अग्रे वर्धामहे। वयं 17. 64 प्राप्नुमः।

चरणः 2 अधुना एवमेव अग्रे गच्छामः। 17 इत्यस्मिन् बारचिह्नं वामपक्षे अस्ति तथा $4^2<17<5^2$ एतां संख्यां भाजकरूपे अथ वामपक्षस्यबारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यां भाज्यरूपे गृह्णन्तु (अर्थात् 17)। भागाकारेण शेषफलं जानन्तु।

चरणः 3 शेषफलं 1 अस्ति अग्रिम बारचिह्नस्य नीचैः लिखितसंख्यां अर्थात् 64 शेषफलस्य दक्षभागे लिखन्तु। 164 प्राप्नुवन्तु।

चरणः 4 भाजकं द्विगुणितं कुर्वन्तु तथा एतम् एतस्य दक्षभागे लिखन्तु। पूर्वं 64 दशमलवस्य भागे आसीत् अतः भागफले दशमलवं रक्षन्तु।

	4.2
4	17.64
	−16
82	164
	− 164
	0

चरणः 5 वयं जानीमः यत् 82×2 = 164 अतः नवीनसंख्या 2 अस्ति। भागाकारं कुर्वन्तु अथ शेषफलं जानन्तु।

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	− 16
	1

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	− 16
8_	1 64

	4.
4	17.64
	− 16
82	164

चरण: 6 अतः शेषफलं 0 अस्ति साम्प्रतं किमपि बारचिह्नं नास्ति। अतः $\sqrt{17.64} = 4.2$

उदाहरणम् 13 12.25 इत्यस्य वर्गमूलं जानन्तु।

समाधानम्

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	− 9
65	325
	325
	0

अतः $\sqrt{12.25}=3.5$

कस्यां दिशि वर्द्धेम -

176.341 संख्यायां ध्यानं ददतु। पूर्णसंख्यायाः तथा दशमलवसंख्यायाः उभयपक्षे बारचिह्नं योजयन्तु। दशमलवभागे कः विधि अस्ति यः पूर्णभागात् भिन्नः अस्ति ?

176 इत्यस्मिन् ध्यानं ददतु वयं दशमलवस्य पार्श्वे एककस्थानात् प्रारभ्य वामपक्षे गच्छामः। प्रथमबारचिह्नं 76 संख्यायाः उपरि तथा द्वितीयबारचिह्नं 1 संख्यायाः उपरि अस्ति। .341 इत्यस्मै वयं दशमलवात् प्रारभ्य दक्षभागं प्रति गच्छामः। प्रथमबारचिह्नं 34 संख्यायाः उपरि तथा द्वितीयबारचिह्नं योजितुं वयं 1 संख्यायाः पश्चात् 0 इति स्थापयामः तथा एवमेव .$\overline{34}$ $\overline{10}$ निर्मामः।

	48
4	$\overline{23}\overline{04}$
	−16
88	704
	704
	0

उदाहरणम् 14 एकस्य वर्गाकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं 2304 m^2 अस्ति। अस्यवर्गाकारक्षेत्रस्य भुजं जानन्तु।

समाधानम् वर्गाकारक्षेत्रस्य क्षेत्रफलं = $\sqrt{2304}\,m^2$

अतएव वर्गाकारक्षेत्रभुजस्य क्षेत्रफलं =$\sqrt{2304}$ m^2)

वयं प्राप्नुमः यत् $\sqrt{2304}$ =48

इत्थं वर्गाकारक्षेत्रस्य भुजः 48 m अस्ति।

उदाहरणम् 15 एकस्मिन् विद्यालये 2401 विद्यार्थिनः सन्ति पी.टी अध्यापकः तान् ईदृशं पङ्क्तौ स्थापितुम् इच्छन्ति यत् पङ्क्तीनां संख्या स्तम्भसंख्यायाः समाना भवेत्। पङ्क्तीनां संख्यांजानन्तु।

समाधानम् स्वीकुर्मः यत् पङ्क्तीनां संख्या x अस्ति।

अतः स्तम्भानां संख्या =x

अत एव विद्यार्थिनां संख्या =x ×x=x^2

अतः x^2=2401 अर्थात् x = $\sqrt{2401}$ =49 भवति।

पङ्क्तीनां संख्या = 49

	49
4	$\overline{24}\overline{01}$
	16
89	801
	801
	0

6.7 वर्गमूलस्य अनुमानम्

निम्नस्थितिषु विचारं कुर्वन्तु -

1. देवेश्याः पार्श्वे वस्त्राणाम् एकः खण्डः अस्ति। यस्य क्षेत्रफलं 125 cm^2 अस्ति। सा ज्ञातुम् इच्छति यत् किं सा 15 cm भुजस्य करवस्त्रं निर्मातुं शक्नोति।यदि एतत् सम्भवम् अस्ति तर्हि सा ज्ञातुम् इच्छति यत् अस्मात् खण्डात् अधिकाधिकं कियत् औन्नत्य-करवस्त्रं निर्मातुं शक्यते।

2. मीना शोभा च एकं खेलं खेलितवती। प्रथमा संख्यां ददाति अथ द्वितीया तस्याः वर्गमूलं ददाति। मीना प्रथमं प्रारब्धवती। सा 25 उक्तवती तथा शोभा शीघ्रम् एव 5 उत्तरं दत्तवती तदा शोभा 81 उक्तवती एवं मीना 9 इति उत्तरं दत्तवती। एतत् तावत् पर्यन्तम् अचलत् यावत् संख्या 250 पर्यन्तं न गतवती। इदानीं शोभा उत्तरं दातुं न अपारयत् तदा मीना उक्तवती शोभे ! त्वम् एकाम् ईदृशीं संख्यां वद यस्याः वर्गः 250 इत्यस्य समीपे भवेत्।

एतासु सर्वासु स्थितिषु वर्गमूलम् अनुमातुम् आवश्यकता भवति।

वयं जानीमः यत् $100 < 250 < 400$ तथा $\sqrt{100}=10$ तथा $\sqrt{400}=20$

अतः $10 < \sqrt{250} < 20$

तथापि वयं वर्गसंख्यायाः पार्श्वे न स्मः।

वयं जानीमः यत् $15^2 = 225$ तथा $16^2 = 256$

अतः $15 < \sqrt{250} < 16$ तथा 250, 225 इत्यस्य अपेक्षया 256 इति अत्यन्तं पार्श्वे अस्ति।

अतः $\sqrt{250}$ प्रायः 16 अस्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यानां निकटतमसङ्ख्याः अनुमीयन्ताम्

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

प्रश्नावली 6.4

1. निम्नलिखित-संख्यानां वर्गमूलं भागाकारविधिना जानन्तु -

(i)	2304	(ii)	4489	(iii)	3481	(iv)	529
(v)	3249	(vi)	1369	(vii)	5776	(viii)	7921
(ix)	576	(x)	1024	(xi)	3136	(xii)	900

2. निम्नलिखित-संख्यासु प्रत्येकं वर्गमूलं जानन्तु - (गणनां विना एव)

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225

(v) 390625

3. निम्नलिखित-दशमलव-संख्यानां वर्गमूलं जानन्तु -

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25

(v) 31.36

4. निम्नलिखित-संख्यासु प्रत्येकस्मिन् कां न्यूनतमसंख्यां व्यवकलयेत् येन एकस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः प्राप्तिः भवेत्। इत्थं रीत्या प्राप्तपूर्णवर्गसंख्यानां वर्गमूलं जानन्तु -

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825

(v) 4000

5. निम्नलिखित-संख्यासु प्रत्येकस्मिन् न्यूनतमं कति संख्यां योजयेत् येन एकस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः प्राप्तिः भवेत्। इत्थं रीत्या प्राप्तपूर्णवर्गसंख्यानां वर्गमूलं जानन्तु -

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825

(v) 6412

6. कस्यापि वर्गभुजस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य क्षेत्रफलं 441 m^2 अस्ति।
7. कस्मिन् अपि समकोणत्रिभुजे ABC इत्यस्मिन् $\angle B = 90^\circ$
   (a) यदि AB = 6cm . BC = 8cm अस्ति तर्हि AC जानन्तु।
   (b) यदि AC = 13cm . BC = 5cm अस्ति तर्हि AB जानन्तु।
8. एकस्य मालाकारस्य पार्श्वे 1000 पादपाः सन्ति। एतेषां पादपानां वपनं सःईदृक् इच्छति यत् पङ्क्तीनां संख्या अथ स्तम्भानां संख्या समाना भवेत्। एतदर्थं न्यूनातिन्यूनं पादपानां संख्यां जानन्तु यस्य आवश्यकता तस्य कृते वर्त्तते।
9. एकस्मिन् विद्यालये 500 विद्यार्थिनः सन्ति पी.टी अध्यापकः तान् ईदृशं पङ्क्तौ स्थापितुम् इच्छन्ति यत् पङ्क्तीनां संख्या स्तम्भसंख्यायाः समाना भवेत्। एतत् व्यवस्थितुं कति विद्यार्थिनः बहिः गच्छेयुः।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. यदि एका प्राकृतसंख्या m इति n^2 रूपे व्यक्तुं शक्यते यत्र n अपि एका प्राकृतसंख्या अस्ति तदा m एका वर्गसंख्याअस्ति।

2. सर्वासां वर्गसंख्यानाम् अन्ते एककस्थाने 0, 1, 4, 5, 6 अथवा 9 भवति।

3. वर्गसंख्यानाम् अन्ते शून्यानां संख्या केवलं समा भवति।

4. वर्गमूलं वर्गस्य प्रतिलोम-सङ्क्रिया अस्ति।

5. एकस्याः पूर्णवर्गसंख्यायाः द्वे पूर्णवर्गमूले भवतः। धनात्मकवर्गमूलं $\sqrt{\ }$ सङ्केतेन व्यक्तीभवति। उदाहरणार्थं $3^2 = 9$,$\sqrt{9}=3$ भवति।

अध्यायः 7

घन एवं घनमूलम्

7.1 भूमिका

एषा कथा भारतस्य महत्सु प्रतिभाशालिविभूतिषु अन्यतमः एस. रामानुजनः इत्यस्य विषये अस्ति। एकदा एकः अन्यः प्रसिद्धः गणितज्ञः प्रो. जी.एच. हार्डी महोदयः तेन साकं मेलनार्थं टैक्सीयानेन आगतः यस्य संख्या 1729 आसीत्। रामानुजनमहोदयेन साकं वार्त्तालापसमये हार्डी महोदयः एतां संख्यां एका नीरससंख्या रूपेण ज्ञापितवान्। रामानुजनवर्यः शीघ्रमेव कथितवान् यत् 1729 वस्तुतः रोचक-संख्या अस्ति। तेन उक्तं यत् एषा एका ईदृशी संख्या वर्त्तते या लघुत्तमा अस्ति अथ एतां संख्यां घनद्वयरूपे अथ भिन्न-भिन्न द्विप्रकारकेण ज्ञापितुं शक्यते।

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

ततः आरभ्य 1729 इति एषा संख्या हार्डी-रामानुजनसंख्या रूपेण ख्याता अभवत्।

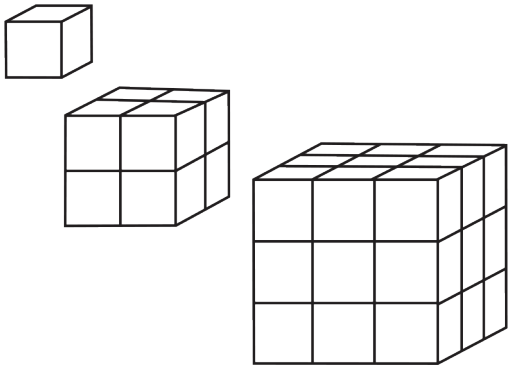
हार्डी-रामानुजनसंख्या -
1729 इति लघुत्तमा हार्डी-रामानुजनसंख्या अस्ति। अनेन प्रकारेण अनेकाः संख्याः सन्ति। तासु काश्चन वर्त्तन्ते - 4104 (2, 16; 9, 15), 13832 (18, 20; 2, 024)। कोष्ठकेषु दत्तां संख्यां नीत्वा एतांजानन्तु।

यद्यपि 1729 इत्यस्य इयं विशेषता रामानुजात् प्रायः 300 वर्षं पूर्वमेव ज्ञातम् आसीत्।

रामानुजनवर्याः एतत् कथं जानन्ति स्म ? सः संख्यया सह प्रेम करोति स्म। स्वकीये सम्पूर्णजीवने ते संख्यायाः प्रयोगं कुर्वन्तः आसन्। सम्भवतः तेन ताः संख्याः ज्ञातव्याः आसन् याः संख्याः द्विवर्गस्य योगरूपे अथ द्वि घनस्य योगरूपे व्यक्तुं शक्यते।

घनानाम् अनेकानि अपराणि प्रतिरूपाणि भवन्ति। आगच्छन्तु वयं घनं घनमूलं तथा एतेन सम्बन्धितं तथ्यं जानीमः।

ता आकृतयः यस्याः 3 परिमाणानि सन्ति ताः दृढाकृतयः उच्यन्ते।



7.2 घनः

भवन्तः जानन्ति यत् घनः शब्दस्य प्रयोगः ज्यामितौ भवति। घनः एका ईदृशी दृढा आकृतिः अस्ति यस्याः सर्वे भुजाः समानाः भवन्ति। 1 cm भुजीय कति घनेन 2 cm भुजीय-एकः घनः भविष्यति ? 1 cm भुजीय कति घनेन 3 cm भुजीय-एकः घनः भविष्यति ?

1, 8, 27 .... संख्यासु विचारं कुर्वन्तु , एते पूर्णघनाः अथवा घनसंख्याः इति उच्यन्ते । किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् एतेषां एतत् नाम कथम् अस्ति ? एतासु प्रत्येकसंख्या तदा प्राप्ता भवति यदा एकां संख्यां स्वयं तया एव त्रिबारं गुणनं क्रियते । वयं पश्यामः यत् $-1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ अस्ति ।

यतो हि $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ अस्ति अतएव 125 एका घनसंख्या वर्त्तते । किं 9 एका घन संख्या अस्ति ? न यतो हि $9 = 3 \times 3$ अस्ति तथा ईदृशी काऽपि प्राकृतसंख्या नास्ति या स्वयं बारत्रयं गुणाकारे कृते सति 9 संख्यायाः प्राप्तिः भवेत् । वयं जानीमः यत् $2 \times 2 \times 2 = 8$ तथा $3 \times 3 \times 3 = 27$ अस्ति । एतेन एतत् प्रदर्शितं भवति यत् 9 एका पूर्णघनसंख्या नाऽस्ति । निम्नसारण्यां 1 तः 10 पर्यन्तं संख्यानां घनः प्रदत्तः अस्ति ।

सारणी 1

संख्याः	घनः
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ .....
6	$6^3 =$ .....
7	$7^3 =$ .....
8	$8^3 =$ .....
9	$9^3 =$ .....
10	$10^3 =$ .....

संख्याः 729, 1000, 1728 अपि पूर्णः घनः अस्ति ।

पूरयन्तु

अत्र भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 1 तः 1000 पर्यन्तं केवलं दशपूर्णघनाः सन्ति । (एतस्य परीक्षणं कुर्वन्तु) 1 तः 100 पर्यन्तं कति घनाः सन्ति ? सम संख्यानां घनं पश्यन्तु । किम् एते सर्वे घनाः सन्ति ? भवन्तः विषमसंख्यानां घनानां विषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ? अधुना 11 तः 20 पर्यन्तं संख्यानां घनाः निम्नसारण्यां प्रदर्श्यमानाः सन्ति ।

सारणी 2

संख्याः	घनः
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

वयं समाः स्मः अथ अस्माकं घनाः अपि समाः सन्ति ।

वयं विषमाः स्मः अथ अस्माकं घनाः अपि विषमाः सन्ति

एतादृश्यां कस्याञ्चित् संख्यायां विचारं कुर्वन्तु यस्याः एककस्य अङ्कः 1 अस्ति। एतेषु प्रत्येकसंख्यायाः घनं जानन्तु। तस्याः संख्यायाः घनस्य एककाङ्कविषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति यस्याः एककस्य अङ्कः 1 अस्ति ?

एवमेव तासां घनसंख्यानां एककाङ्कविषये जानन्तु यस्याः एककस्य अङ्काः 2, 3, 4 इत्यादयः सन्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितसंख्यासु प्रत्येकघनस्य एककाङ्कं जानन्तु।

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005
(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

7.2.1 कानिचन रोचकप्रतिरूपाणि

1. क्रमागतविषमसंख्यानां योजनम् -

विषमसंख्यायोगानां निम्नलिखित-प्रतिरूपं पश्यन्तु -

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

किम् एतत् रोचकं नास्ति ? योगः 10^3 प्राप्तुं कति क्रमागतविषमसंख्यानाम् आवश्यकता भविष्यति ?

प्रयासं करोतु

उपरोक्तप्रतिरूपाणां प्रयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितसंख्यां विषमसंख्यानां योगरूपे परिज्ञापयन्तु।

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

निम्नलिखितप्रतिरूपं पश्यन्तु -

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

उपरोक्तप्रतिरूपाणां प्रयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितानां मानं जानन्तु -

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 9^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. घनः तस्य अभाज्यगुणनखण्डः -

कासाञ्चन संख्यानां तथा तासां घनानां निम्नलिखित-अभाज्य-गुणनखण्डे विचारं कुर्वन्तु -

एकस्याः संख्यायाः अभाज्य गुणनखण्डनम्	**तस्याः घनस्य अभाज्य गुणनखण्डनम्**
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

स्वस्य घने प्रत्येकम् अभाज्यगुणनखण्डः बारत्रयम् आगच्छति।

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ध्यानं ददतु यत् एकस्यायाः संख्यायाः प्रत्येकम् अभाज्य-गुणनखण्डनं तस्याः संख्यायाः घनस्य अभाज्य-गुणनखण्डे त्रिबारम् आयाति। यदि कस्याः अपि संख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डे प्रत्येकं गुणनखण्डः त्रिबारम् आगच्छेत् तर्हि किं सा संख्या पूर्णघनरूपे भवति। अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु।

किं 216 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?

अभाज्य-गुणनखण्डद्वारा $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

प्रत्येकं गुणनखण्डः त्रिवारम् आयाति $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$ यः एकः पूर्णः घनः अस्ति।

किं 729 एकः पूर्णः घनः अस्ति ? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

गुणनखण्डानां समूहत्रयस्य निर्माणं भवितुम् अर्हति।

आम् 729 एकः पूर्णः घनः अस्ति।

आगच्छन्तु अधुना 500 इत्यस्य कृते अस्य परीक्षणं कुर्मः।

500 इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डनम् अस्ति $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

गुणनखण्डानां समूहत्रयस्य निर्माणं भवितुम् अर्हति।

अत एव 500 एकः पूर्णः घनः नास्ति।

उदाहरणम् 1 किं 243 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?

समाधानम् - $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अत्र 3 इत्यस्य एकः त्रिकः निर्माणानन्तरं अवशिष्टः भवति। अतः 243 एकः पूर्णः घनः नास्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितेषु काः संख्याः पूर्णघनरूपाः सन्ति ?

(i) 400	(ii) 3375
(iii) 8000	(iv) 15625
(v) 9000	(vii) 6859
(vii) 2025	(viii) 10648

7.2.2 लघुत्तमः गुणजः यः पूर्णः घनः अस्ति

राजः प्लास्टिसिन इत्यस्य एकं घनाभं निर्माति। अस्य घनाभस्य औन्नत्यं वैशाल्यं उत्तुङ्गता च क्रमशः 15cm, 30 cm तथा15cm अस्ति।

अनुः तस्मात् पृच्छति यत् एकस्य घनाभनिर्माणस्य कृते कति घनाभस्य आवश्यकता भवति ?किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति ?

राजः वदति घनाभस्य आयतनम् $= 15 \times 30 \times 15$

$= 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

यतो हि उपरोक्त-अभाज्य-गुणनखण्डे केवलम् एकबारम् एव 2 अस्ति अत एव एतं पूर्णघनं $2 \times 2 = 4$ कर्तुम् इत्यस्य आवश्यकता भविष्यति। अतः अस्माकं कृते एकं घनं निर्मातुं चतुर्णां घनानाम् आवश्यकता भविष्यति।

उदाहरणम् 2 किं 392 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?यदि न तर्हि एतादृशीं लघुतमां प्राकृत-संख्यां जानन्तु यस्मात् 392 इति गुणाकारे कृते सति गुणनफलरूपे एकं पूर्णं घनं प्राप्नुमः।

समाधानम् - $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

अभाज्य-गुणनखण्डः 7 त्रयस्य समूहे नागच्छति अतः 392 एकः पूर्णः घनः नास्ति। एतं पूर्णं घनं कर्तुं 1 तथा 7 इत्यस्य आवश्यकता वर्त्तते। अस्यां स्थितौ -

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ यः एकः पूर्णः घनः अस्ति।

अतः सा लघुत्तमा प्राकृत-संख्या 7 अस्ति यां 392 इत्यनेन गुणाकारे कृते सति एकं पूर्णं घनं प्राप्नुमः ।

उदाहरणम् 3 किं 53240 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?यदि न तर्हि 53240 इति कया लघुत्तमप्राकृतसंख्यया सह भागाकारः भवेत् यस्मात् भागफलं एकः पूर्णघनः भवेत् ?

समाधानम् - 53240=2 ×2 ×2 ×11 ×11 ×11 ×5 अत्र

अभाज्य-गुणनखण्डे 5 त्रयस्य समूहे नागच्छति । अतः 53240 एकः पूर्णः घनः नास्ति । उपरोक्त-गुणनखण्डे 5 केवलम् एकबारम् एव आगता यदि वयं दत्तां संख्यां 5 इत्यनेन भागाकारं कुर्मः तर्हि भागफलस्य अभाज्य-गुणनखण्डे 5 न आगमिष्यति ।

एवमेव 53240 ÷ 5 = 2 ×2 ×2 ×11 ×11 ×11 अतः सा लघुत्तमा प्राकृत-संख्या 5 अस्ति यस्याः 53240 इति भागाकारे कृते सति भागफलं एकः पूर्णघनः भविष्यति । तस्यां स्थितौ पूर्णः घनः 10648 भविष्यति ।

उदाहरणम् 4 किं 1188 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?यदि न तर्हि कया लघुत्तमप्राकृतसंख्यया सह 1188 इत्यस्य भागाकारः भवेत् यस्मात् भागफलं एकः पूर्णघनः भवेत् ?

समाधानम् -1188 = 2 × 2 ×3 ×3 ×3 ×11 अत्र

अभाज्य-गुणनखण्डः 2 तथा 11 त्रयस्य समूहे नागच्छति । अतः 1188 एकः पूर्णः घनः नास्ति । 1188 इत्यस्य उपरोक्त-गुणनखण्डे अभाज्यः 2 केवलं द्विवारम् आगच्छति तथा अभाज्यः 11 एकबारम् एव । अतः यदि वयं 1188 इति 2×2 ×11=44 इत्यनेन भागाकारं दद्यात् तर्हि भागफलस्य अभाज्य-गुणनखण्डे 2 तथा 11 न आगमिष्यन्ति ।

अतः सा लघुत्तमप्राकृतसंख्या 44 अस्ति यस्मात् 1188 इत्यस्य भागाकारे कृते सति भागफलं एकः पूर्णघनः भविष्यति सहैव परिणामस्वरूपेण =1188 ÷ 44 = 27 ($=3^3$)

उदाहरणम् 5 किं 68600 एकः पूर्णः घनः अस्ति ?यदि न तर्हि तां लघुत्तमप्राकृत संख्यां जानन्तु यस्याः 68,600 इति गुणाकारे कृते सति एकः पूर्णघनः भवेत् ?

समाधानम् -वयं प्राप्तवन्तः 68,600=2 × 2 × 2 × 5 × 5 ×7 ×7 ×7 अस्मिन् गुणनखण्डे 5इत्यस्य कोऽपि त्रिकः नास्ति । अतः 68,600 एकः पूर्णः घनः नास्ति । एतं पूर्णघनं निर्मातुं वयं एतं 5 इत्यनेन सह गुणाकारं कुर्मः ।

एवं रीत्या 68,600 × 5 = 2 × 2 × 2 × 5 × 5 × 5 ×7 ×7 ×7

= 3,43,000 यःएकः पूर्णः घनः अस्ति ।

ध्यानं ददतु यत् 343 एकः पूर्णः घनः अस्ति । उदाहरणं 5 इत्यनेन वयं जानीमः यत् 3,43,000 अपि एकः पूर्णः घनः अस्ति ।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

परीक्षणं कुर्वन्तु यत् निम्नलिखितेषु का संख्या पूर्णः घनः अस्ति - (i)2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 10,000 (ix) 27000000 (x) 1000 एतेषु पूर्णघनेषु भवन्तः किं प्रतिरूपं पश्यन्ति ?

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखितेषु का संख्या पूर्णः घनः नास्ति ?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656
2. तां लघुत्तमां संख्यां जानन्तु यस्याः निम्नलिखितसंख्यां गुणाकारे कृते सति पूर्णः घनः प्राप्येत ?
   (ii) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100
3. तां लघुत्तमां संख्यां जानन्तु यस्याः निम्नलिखितसंख्यां भागाकारे कृते सति पूर्णः घनः प्राप्येत ?
   (iii) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704
4. परीक्षितः प्लास्टिसिन इत्यस्य एकं घनाभं निर्माति यस्य भुजाः 5cm, 2cm तथा 5cm सन्ति। एकं घनं निर्मातुं एतादृशानां कति घनाभानाम् आवश्यकता भविष्यति ?

7.3 घनमूलम्

यदि कस्यापि घनस्य आयतनं 125 cm^3अस्ति तर्हि तस्य भुजस्य औन्नत्यं किं भविष्यति ? अस्य घनस्य भुजस्य औन्नत्यं ज्ञातुं वयम् एकाम् ईदृशीं संख्यां जानीयाम यस्याः घनः 125 भवेत्।

यथा भवन्तः जानन्ति यत् वर्गमूलस्य ज्ञानं वर्गकरणस्य सङ्क्रियायाः प्रतिलोमसङ्क्रिया अस्ति। एवमेव घनमूलं ज्ञातकरणस्य सङ्क्रिया घनं ज्ञातकरणस्य सङ्क्रियायाः प्रतिलोमसङ्क्रिया अस्ति।

वयं जानीमः यत् $2^3=8$ अस्ति। अत एव वयं कथयामः यत् 8 इत्यस्य घनमूलं 2 अस्ति। वयम् एतम् $\sqrt[3]{8}=2$ एवं लिखामः। $\sqrt[3]{}$इति सङ्केतः घनमूलं ज्ञापयति।

निम्नलिखितेषु विचारं कुर्वन्तु -

कथनम्	निष्कर्षः
$1^3=1$	$\sqrt[3]{1}=1$
$2^3=8$	$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{(2^3)}=2$
$3^3=27$	$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{(3^3)}=3$
$4^3=64$	$\sqrt[3]{64}=4$
$5^3=125$	$\sqrt[3]{125}=5$

कथनम्	निष्कर्षः
$6^3=216$	$\sqrt[3]{216}=6$
$7^3=343$	$\sqrt[3]{343}=7$
$8^3=512$	$\sqrt[3]{512}=8$
$9^3=729$	$\sqrt[3]{729}=9$
$10^3=1000$	$\sqrt[3]{1000}=10$

7.3.1 अभाज्यगुणनखण्डविधिद्वारा घनमूलम्

3375 इत्यस्यां संख्यायां विचारं कुर्वन्तु। वयम् अस्य घनमूलम् अभाज्यगुणनखण्डेन ज्ञास्यामः।

$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3=(3 \times 5)^3$

अतः 3375 इत्यस्य घनमूलं = $\sqrt[3]{3375}=3 \times 5=15$

एवमेव $\sqrt[3]{74088}$ ज्ञातुं वयं प्राप्तवन्तः स्मः ।

$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$

अतः $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

उदाहरणम् 6 8,000इत्यस्य घनमूलं जानन्तु ।

समाधानम् - 8,000इत्यस्य अभाज्यगुणनखण्डः $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ अस्ति ।

अतः $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

उदाहरणम् 7 अभाज्यगुणनखण्डविधिना 13824 इत्यस्य घनमूलं जानन्तु ।

समाधानम् - $13824 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

अतः $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

ज्ञापयन्तु सत्यम् उत असत्यम् - कस्यापि पूर्णाङ्कस्य m इत्यस्य कृते $m^2 < m^3$ भवति । कथम् ?

7.3.2 कस्यापि घनसंख्यायाः घनमूलम्

यदि भवन्तः एवं जानन्ति यत् प्रदत्तासंख्या एका घनसंख्या अस्ति तर्हि तस्य घनमूलं ज्ञातुं निम्नलिखितविधेः प्रयोगः भवितुमर्हति ।

चरणः 1 कामपि घनसंख्यां स्वीकुर्वन्तु 857375 तथा तस्य दक्षपक्षात् अङ्कात् प्रारभ्य त्रयाणाम् अङ्कानां समूहं निर्मान्तु ।

857 375

↓ ↓

द्वितीयः समूहः प्रथमः समूहः

वयं कस्याः अपि प्रदत्तायाः घनसंख्यायाः घनमूलम् एकं चरणबद्धप्रक्रियया सङ्कलितुं शक्नुमः । अत्र वयं त्रयाङ्कानां समूहद्वयं 375 तथा 875 प्राप्तवन्तः ।

चरणः 2 प्रथमः समूहः 375 भवतः कृते वाञ्छितघनमूलस्य एककस्य अङ्कं दास्यति । 375 संख्यायाः एककस्य अन्तिमः अङ्कः 5 अस्ति । वयं जानीमः यत् 5 कस्याः अपि संख्यायाः एककस्य स्थाने तदा आगच्छति यदा तस्य घनमूलस्य एककस्य अङ्कः 5 भवति । एवं प्रकारेण घनमूलस्य एककस्य अङ्कः 5 वयं प्राप्नुमः ।

चरणः 3 साम्प्रतं द्वितीयं समूहं 875 इति स्वीकुर्वन्तु ।

वयं जानीमः यत् $9^3 = 729$ तथा $10^3 = 1,000$ सहैव $729 < 857 < 1,000$ वयं लघ्वी संख्यायाः 729 इत्यस्याः एककस्य अङ्कं वाञ्छितघनमूलस्य दशकस्य अङ्करूपे गृह्णामः ।

अतः $\sqrt[3]{857375} = 95$ वयं प्राप्नुमः ।

उदाहरणम् 8 17,576 इत्यस्य घनमूलं आकलनेन जानन्तु ।

समाधानम् - प्रदत्ता संख्या 17,576 अस्ति ।

चरणः 1 17,576 इत्यस्य सर्वतः दक्षभागस्य अङ्कात् प्रारभ्य त्रयाणाम् अङ्कानां समूहं निर्मान्तु । एतौ समूहौ 17 तथा $\underline{576}$ स्तः । अस्यां स्थितौ एकः समूहः 576 अस्ति यस्मिन् त्रयः अङ्काः सन्ति तथा द्वितीयः समूहः 17 अस्ति यस्मिन् केवलम् अङ्कद्वयं वर्त्तते ।

चरण: 2 576 इति स्वीकुर्वन्तु अस्य एककस्य अङ्कः 6 अस्ति। वयं वाञ्छितघनमूलस्य एककस्य अङ्कं 6 इति गृह्णामः।

चरण: 3 द्वितीयं समूहं 17 इति गृह्णन्तु।

2 इत्यस्य घनः 8 अस्ति तथा 3 इत्यस्य घनः 27 अस्ति। 17 इति संख्या 8 एवं 27 संख्यानां मध्ये अस्ति अधुना 2 तथा 3 इत्यनयोः लघ्वी संख्या 2 अस्ति। 2 इत्यस्मिन् एककस्य अङ्कः स्वयं 2 एव अस्ति। वयं 2 इति वाञ्छितघनमूलस्य दशकाङ्करूपे गृह्णामः। एवम्प्रकारेण $\sqrt[3]{17576}=26$ (अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु)।

प्रश्नावली 7.2

1. अभाज्यगुणनखण्डविधिना निम्नलिखितेषु प्रत्येकसंख्यायाः घनमूलं जानन्तु।

   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656

   (ix) 175616 (x) 91125

2. ज्ञापयन्तु सत्यम् उत असत्यम् -

   (i) कस्याः अपि विषमसंख्यायाः घनः समः भवति।

   (ii) एकः पूर्णः घनः शून्यद्वये समाप्तिं न याति।

   (iii) यदि कस्याः अपि संख्यायाः वर्गः 5 इत्यस्मिन् समाप्तः भवति तर्हि तस्य घनः 25 इत्यस्मिन् समाप्यते।

   (iv) ईदृशः कोऽपि पूर्णः घनः नास्ति यः 8 इत्यस्मिन् समाप्तिं याति।

   (v) द्वयोः अङ्कयोः संख्यायाः घनः त्रि-अङ्कीय संख्या भवितुम् अर्हति।

   (vi) द्वयोः अङ्कयोः संख्यायाः घने सप्त अथवा अधिकाः अङ्काः भवितुम् अर्हन्ति।

   (vii) एक-अङ्कीय संख्यायाः घनः एक-अङ्कीय संख्या भवितुम् अर्हति।

3. भवन्तं ज्ञापयति कश्चिद् यत् 1331 एकः पूर्णः घनः अस्ति। किं गुणनखण्डनं विना भवन्तः एवम् अनुमातुं शक्नुवन्ति यत् अस्य घनमूलं किम् अस्ति? एवमेव 4913 , 12167 , तथा 32768 इत्येतेषां घनमूलानाम् अनुमानं कुर्वन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

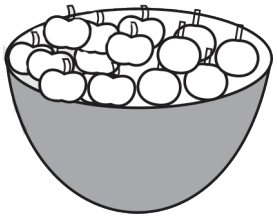
1. संख्याः यथा 1729, 4104, 13832 हार्डी-रामानुजनसंख्याः सन्ति। एतं घनद्वयानां योगरूपे भिन्नद्वयप्रकारेण व्यक्तं कर्तुं शक्यते।
2. एकां संख्यां स्वेन एव बारत्रयं गुणाकारे कृते सति प्राप्तां संख्यां घन संख्या इति उच्यते। उदाहरणार्थं 1, 8, 27 इत्यादिः।
3. यदि कस्याः अपि संख्यायाः अभाज्य-गुणनखण्डे प्रत्येकं गुणनखण्डः त्रिबारम् आगच्छति तदा सा संख्या एकः पूर्णः घनः भवति।
4. सङ्केतः घनमूलं '$\sqrt[3]{\ }$' व्यक्तीकरोति। उदाहरणार्थं $\sqrt[3]{27}=3$ अस्ति।

अध्यायः

8

राशीनां तुलना

8.1 अनुपातानां प्रतिशतं स्मरणम्



वयं जानीमः यत् अनुपातस्य अर्थः अस्ति द्वयोः मात्रयोः तोलनम्। एकस्मिन् कण्डोले द्वे फले स्तः स्वीकुर्वन्तु यत् अस्मिन् 20 सेबफलानि अथ 5 नारङ्गफलानि सन्ति। तर्हि नारङ्गाणां संख्या सेबफलानां संख्यातः अनुपातः = 5 : 20 अस्ति।

एतत् तोलनं भिन्नानां सहायतया $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ इति रूपे अपि कर्तुं शक्यते।

नारङ्गफलानां तोलनायां सेबफलानां संख्यायाः $\frac{1}{4}$ अस्ति। अनुपातरूपे एतत् 1 : 4 अस्ति तथा एतं 4 इत्यस्य तोलनायां 1 अस्ति एवं पठ्यते। अथवा नारङ्गफलानां तोलनायां सेबफलानां संख्या $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ अस्ति यस्य अर्थः अस्ति यत् नारङ्गफलानां तोलनायां सेबफलानां संख्या चतुर्गुणितं वर्त्तते। एतत् तोलनं प्रतिशतोपयोगेन अपि कर्तुं शक्यते।

25 फलेषु 5 नारङ्गफलं वर्त्तते अत एव नारङ्गफलानां प्रतिशतं $\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} =$ 20% अस्ति। (हरं 100 रूपे अस्ति)

अथवा

ऐकिक विधिना

25 फलेषु नारङ्गफलानां संख्या 5 वर्त्तते

अत एव 100 फलेषु नारङ्गफलानां संख्या

$\frac{5}{25} \times 100 = 20$ अस्ति।

यतोहि कण्डोले केवलं सेबफलानि नारङ्गफलानि च सन्ति।

अत एव सेबफलानां प्रतिशतं + नारङ्गफलानां च प्रतिशतम् = 100

अथवा सेबफलानां प्रतिशतं + 20 = 100

अथवा सेबफलानां प्रतिशतं = 100 - 20 = 80

अतः कण्डोले 20% नारङ्गफलं तथा 80% सेबफलम्अस्ति।

उदाहरणम् 1 कस्मिन्नपि विद्यालये vii कक्ष्यायाः कृते वनभोजनस्य योजना भवति। विद्यार्थिनां सम्पूर्णसंख्यायाः 60% बालिकाः सन्ति तथा अस्याः संख्या 18 अस्ति। वनभोजस्य स्थानं विद्यालयात् 55km दूरे अस्ति तथा परिवहनस्वामी प्रत्येकं किलोमीटरं 12 रु. भाटकंनेष्यति अल्पाहारस्य आहत्य व्ययः रु. 4280 अस्ति।

किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति -

1. कक्ष्यायां बालिकानां संख्यायाः बालकानां संख्यातः अनुपातः ?
2. यदि द्वौ अध्यापकौ अपि कक्ष्यया सह वनभोजे गच्छतः तर्हि प्रति व्यक्तिः व्ययः कः ?
3. यदि तेषां प्रथमं विरामस्थलं विद्यालयात् 22 km इत्यस्य दूरे अस्ति तर्हि सः आहत्य 55 km दूरस्य कति प्रतिशतम् अस्ति ? कति प्रतिशतं इतोऽपि दूरी अवशिष्टा वर्त्तते ?

समाधानम्

1. बालिकानां संख्यायाः बालकानां संख्यातः अनुपातं ज्ञातुम् आशिमा तथा जॉन इत्यनेन निम्नलिखितविधेः प्रयोगः कृतः तयोः कृते बालकानां संख्या तथा आहत्य विद्यार्थिनां संख्यां ज्ञातुम् आवश्यकता आसीत्।

आशिमा निम्नलिखितविधेः उपयोगं कृतवती -
स्वीकुर्वन्तु यत् समस्तविद्यार्थिनां संख्या x अस्ति यस्मिन् 60% बालिकाः सन्ति।
अत एव x इत्यस्य 60% = 18
अथवा $\frac{60}{100} \times x = 18$ अर्थात्
$x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$ विद्यार्थिनां सम्पूर्णा संख्या = 30

जॉनः ऐकिकविधेः उपयोगं कृतवान् -
100 विद्यार्थिषु 60 बालिकाः सन्ति। अत एव $\frac{100}{60}$ विद्यार्थिषु एका बालिका अस्ति
अत एव कतिषु विद्यार्थिषु 18 बालिकाः भविष्यन्ति ?
विद्यार्थिनां संख्या $\frac{100}{60} \times 18 = 30$

अत एव बालकानां संख्या = 30 - 18 = 12 अस्ति। अतः बालिकानां संख्यातः बालकानां संख्या 18 : 12 अथवा $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ इत्यस्य अनुपातः अस्ति। $\frac{3}{2}$ इति 3 : 2 रूपे अपि लेख्यते तथा 2 इत्यस्य तोलनायां 3 इति पठ्यते।

2. प्रति व्यक्तेः व्ययं ज्ञातुं यातायात-व्ययः= उभयतः दूरी × परिमाणम्
= (55 × 2)×रु.12
= 110 × 12 = रु.1320

सम्पूर्णः व्ययः = अल्पाहारव्ययः + यातायातव्ययः
= रु.4280 + रु.1320
= रु.5600

सम्पूर्णः जनः = 18 बालिकाः + 12 बालकाः + 2 अध्यापकौ
= 32 जनाः

आशिमा तथा जॉनः प्रति व्यक्तेः व्ययं ज्ञातुम् ऐकिकविधेः उपयोगं कृतवान्।

32 जनानां कृते व्ययमानः राशिः रु. 5600 भविष्यति।

अत एव 1 जनस्य कृते व्ययमानः राशिः = रु. $\frac{5600}{32}$ = रु. 175

3. प्रथमविश्रामस्थलस्य दूरी - 22 km
दूरी इत्यस्य प्रतिशतं ज्ञातुं

आशिमा निम्नलिखितविधेः उपयोगं कृतवती -

$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = 40\%$

(सः अनुपातः $\frac{100}{100} = 1$ इति गुणाकारं कुर्वन्ती तथा प्रतिशते परिवर्तयन्ती अस्ति)

जॉनः ऐकिकविधेः उपयोगं कृतवान् -

55 km इत्यस्मिन् 22 km इत्यस्य यात्रा जाता। 1 km इत्यस्मिन् $\frac{22}{55}$ km इत्यस्य यात्रा जाता।

100km इत्यस्मिन् $\frac{22}{55} \times 100$km इत्यस्य यात्रा जाता। अर्थात् 40 % इत्यस्य यात्रा जाता।

उभयोः उत्तरं सदृशम् एव प्राप्तं तथा तस्य उत्तरम् इत्थम् अस्ति।
विश्रामस्थलस्य दूरी विद्यालयात् सम्पूर्णगम्यमानदूर्याः 40% आसीत्।
अत एव गम्यमानायाः अवशिष्टदूर्याः प्रतिशतं= 100% - 40% = 60%

प्रयासं करोतु

एकस्मिन् प्राथमिकविद्यालये अभिभावकेभ्यः पृष्टवन्तः यत् ते स्व बालकानां गृहकार्ये सहायतां कर्तुं प्रतिदिनं कति होरां व्यतीतं कुर्वन्ति। 90 अभिभावकाः $\frac{1}{2}$ घण्टा तः $1\frac{1}{2}$ पर्यन्तं सहायतां कृतवन्तः। यावतः समयस्य कृते अभिभावकाः स्व बालानां सहायतां उक्तवन्तः तदनुसारम् अभिभावकानां वितरणसंलग्नम् आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति यत् एवम् अस्ति -

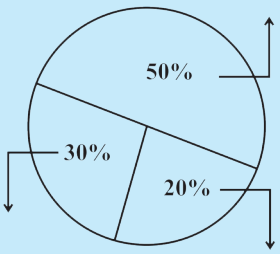
20% अभिभावकाः प्रतिदिनं $1\frac{1}{2}$ घण्टातः अधिकं साहाय्यं कृतवन्तः 30% अभिभावकाः $\frac{1}{2}$ घण्टा तः $1\frac{1}{2}$ पर्यन्तं सहायतां कृतवन्तः 50% अभिभावकाः सहायतां कृतवन्तः एव न।

एतदाधारीकृत्य निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं ददतु।

(i) कति अभिभावकानां सर्वेक्षणं जातम् ?

(ii) कति अभिभावकाः अवदन् यत् ते सहायतां न कृतवन्तः ?

(iii) कति अभिभावकाः अवदन् यत् ते $1\frac{1}{2}$ घण्टातः अधिकं साहाय्यं कृतवन्तः ?



प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखितानाम् अनुपातं जानन्तु

(a) एकस्य द्विचक्रिकावाहनस्य 15 km प्रतिघण्टा- गतिः एकस्य स्कूटरयानस्य 30 km प्रतिघण्टा गतिः।

(b) 5m इत्यस्य 10km इत्यनेन (c) 50 पणकस्य रू. 5 इत्यनेन

2. निम्नलिखित-अनुपातान् प्रतिशते परिवर्त्तयन्तु (a) 3 : 4 (b) 2 : 3

3. 25 विद्यार्थिषु 72% विद्यार्थिनः गणिते समीचीनाः सन्ति। कति विद्यार्थिनः गणिते समीचीनाः न सन्ति ?

4. एकः पादकन्दुकयूथः आहत्य यति क्रीडां क्रीडितवान् तेषु 10 क्रीडासु जयं प्राप्तवान् यदि तस्य जयस्य प्रतिशतं 40 आसीत् तर्हि तेन यूथेन कति प्रतिद्वन्द्वः खेलितः ?

5. यदि चमेल्याः पार्श्वे स्वकीयधनस्य 75% व्ययस्य पश्चात् रु.600 अवशिष्टं तर्हि जानन्तु यत् तस्याः पार्श्वे आरम्भे कति रुप्यकाणि आसन् ?

6. यदि कस्मिन्नपि नगरे 60% जनाः क्रिकेटक्रीडाम् इच्छन्ति, 30% पादकन्दुकक्रीडाम् इच्छन्ति तथा शेषजनाः अन्यां क्रीडाम् इच्छन्ति तर्हि जानन्तु यत् कति प्रतिशतं जनाः अन्यां क्रीडाम् इच्छन्ति ? यदि आहत्य जनाः 50 लक्षाः सन्ति तर्हि प्रत्येकप्रकारिकां क्रीडाम् ईप्स्यमानानां जनानां संख्यां जानन्तु।

8.2 वृद्धिप्रतिशतम् अथवा न्यूनप्रतिशतं जानन्तु

वयं स्वदैनिकजीवने प्रायः निम्नलिखितप्रकारिकां सूचनां प्राप्नुमः।

(i) अङ्कितमूल्योपरि 25% इत्यस्य न्यूनता (ii) शिलातैलस्य (पेट्रोल इति) मूल्ये 10% वृद्धिः

आगच्छन्तु केषाञ्चन ईदृशानाम् उदाहरणानाम् उपरि विचारं कुर्मः।

उदाहरणम् 2 गतवर्षे एकस्य स्कूटरयानस्य मूल्यं 34,000 आसीत्।

अस्मिन् वर्षे अस्य मूल्ये 20% वृद्धिः जाता। स्कूटरयानस्य नवीनमूल्यं किम् ?

समाधानम्

अनिता उक्तवती यत् सा सर्वप्रथमं मूल्ये वृद्धिं ज्ञास्यति यत् रु. 34,000 इत्यस्य 20% अस्ति तथा तदा स्कूटरयानस्य नवीनमूल्यं ज्ञास्यति।

रु. 34,000 इत्यस्य 20% = रु. $\frac{20}{100} \times 34,000$

= रु. 6800

नवीनमूल्यं = प्राचीनमूल्यं + वृद्धि

= रु. 34,000 + रु.6,800 =रु. 40,800

अथवा

सुनीता ऐकिकविधेः उपयोगं कृतवती। 20% वृद्धेः अर्थः यत् रु. 100, वृद्धेः पश्चात् रु. 120 भवति। अत एव रु. 34000 वर्धयित्वा कति भविष्यति ?वृद्धेः पश्चात् मूल्यम् = रु. $\frac{120}{100} \times 34,000$

= रु. 40,800

एवमेव मूल्ये न्यूनं प्रतिशतं यथार्थन्यूनं ज्ञात्वा तथा एतं वास्तविकमूल्ये व्यवकलने कृते सति नवीनमूल्यं भविष्यति।

स्वीकुर्वन्तु विक्रयणे वृद्ध्यर्थं स्कूटरयानस्य मूल्यं 5% व्यवकलितं तदा आगच्छन्तु स्कूटरयानस्य मूल्यं जानीमः।

स्कूटरयानस्य मूल्यम् = रु. 34,000

मूल्येषु न्यूनता = रु. 34,000 इत्यस्य 5% = रु. $\frac{5}{100} \times$ रु.34,000 = रु.1700

नवमूल्यम् = प्राचीनमूल्यं - मूल्ये न्यूनता

= रु.34,000 - रु.1700 = रु.32300

वयम् एतम् अस्य अध्यायस्य अग्रिमे अनुभागे अपि उपयोगं कुर्मः।

8.3 लाभांशस्य ज्ञापनम्

कस्यापि वस्तुनः अङ्कितमूल्ये दीयमानः लाभांशः बट्टा इति उच्यते। एतत् सामान्यतः ग्राहकान् क्रयणार्थम् आकर्षितुम् अथवा सामग्रीणां विक्रयणे वृद्ध्यर्थम् आपणिकः ददाति। भवन्तः अङ्कितमूल्येषु विक्रयमूल्यं व्यवकल्य्य ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 3 रु. 840 इत्यङ्कितं वस्तु रु. 714 इत्यस्मिन् विक्रयणं भवति। लाभांशः अथ लाभांशप्रतिशतं कति वर्त्तते।

समाधानम् लाभांशः = अङ्कितमूल्यम् - विक्रयमूल्यम्

= रु. 840 - रु. 714 = रु. 126

यतो हि लाभांशः अङ्कितमूल्येषु अस्ति अत एव वयम् अङ्कितमूल्यमेव आधारं मन्यामहे।

रु. 840 अङ्कितमूल्ये रु. 126 लाभांशः अस्ति ,

तर्हि रु. 100 इति अङ्कितमूल्ये कति लाभांशः भविष्यति ?

लाभांशः = $\frac{126}{840} \times 100 = 15\%$

यदि लाभांशस्य प्रतिशतं दत्तम् अस्ति तर्हि भवन्तः लाभांशम् अपि ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 4 एकस्य अर्धनिचोलस्य (फ्रॉक् इत्यस्य) सूचीमूल्यं रु. 220 अस्ति। विक्रयण-आपणे 20% लाभांशस्य घोषणा भवति। अस्मिन् अर्धनिचोले (फ्रॉक् इत्यस्मिन्) लाभांशस्य राशिः कः तथा अस्य विक्रयमूल्यं किम् ?

समाधानम् अङ्कितमूल्यम् अथ सूची मूल्यं समानं भवति। 20% लाभांशस्य अर्थः अस्ति यत् रु. 100 अङ्कितमूल्योपरि रु. 20 इति लाभांशः वर्त्तते।

ऐकिकविधिना रु. 1 इत्यस्मिन् रु. $\frac{20}{100}$ इत्यस्य लाभांशः भविष्यति।

रु. 220 इत्यस्मिन् लाभांशः = $\frac{20}{100} \times$ रु.220 = रु.44

विक्रयमूल्यम् =(रु. 220 - रु. 44) अथवा रु. 176

रेहाना अस्याः समस्यायाः समाधानम् एवं कृतवती

20% लाभांशस्य अर्थः अस्ति यत् रु. 100 इति अङ्कितमूल्योपरि रु. 20 इत्यस्य लाभांशः अस्ति।

अतः विक्रयमूल्यं रु. 80 अस्ति। ऐकिकविधेः उपयोगेन

यदा अङ्कितमूल्यं रु. 100 अस्ति तर्हि विक्रयमूल्यं = रु. 80

यदा अङ्कितमूल्यं रु. 1 अस्ति तर्हि विक्रयमूल्यं = रु. $\frac{80}{100}$

यद्यपि लाभांशज्ञानं विना अपि अहं साक्षात् विक्रयमूल्यं ज्ञातुं शक्नोमि।

अतः यदा अङ्कितमूल्यं 220 अस्ति तर्हि विक्रयमूल्यं = $\frac{80}{100} \times$ रु.220 = रु.176

प्रयासं करोतु

1. एकः आपणः 20% लाभांशं ददाति। निम्नलिखितेषु प्रत्येकं विक्रयमूल्यं कति भविष्यति ?

रु. 120 अङ्कितमूल्ययुक्तम् एकं परिधानम्।

रु. 750 अङ्कितमूल्ययुक्तम् युगलं पादत्राणम्।

रु. 250 अङ्कितमूल्ययुक्तः एकः स्यूतः।

1. रु. 15000 अङ्कितमूल्ययुक्ता एका चतुष्पीठिका रु. 14,400 इत्यस्मिन् उपलब्धा अस्ति। लाभांशं लाभांशप्रतिशतं च जानन्तु।
2. एका मञ्जूषा 5% लाभांशे रु. 5225 इत्यस्मिन् विक्रीयते। मञ्जूषायाः अङ्कितमूल्यं जानन्तु।

8.3.1 प्रतिशते आकलनम्

एकस्मिन् आपणे भवतां मूल्यपत्रं रु. 577.80 अस्ति तथा आपणिकः 15 लाभांशम् अपि प्रदानं करोति। भवन्तः देयराशीनाम् आकलनं कथं करिष्यन्ति ?

(i) देयराशिपत्रं रु. 577.80 इत्यस्य निकटतमदशके पूर्णाङ्कितं कुर्वन्तु अर्थात् रु. 580।

(ii) अस्य 10% जानन्तु अर्थात् $\frac{10}{100}$ × रु.580=रु.58

(iii) अस्य अर्धं गृह्णन्तु , अर्थात् $\frac{1}{2}$ × रु.58 = रु.29

(iv) (ii) तथा (iii) इत्यनयोः राशिं योजयन्तु। योगे सति रु. 87 इति प्राप्यते।
अत एव भवन्तः स्व देयपत्रस्य राशिं रु. 87 अथवा रु. 85 न्यूनं कर्तुं शक्नुवन्ति।
एवम्प्रकारेण देयपत्रस्य राशेः सन्निकटमानं रु. 495 भविष्यति।

1. अस्यैव देयपत्रराशेः 20% लाभांशात् आकलनं कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।
2. रु. 375 इत्यस्य 15% ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

8.4 क्रयणेन विक्रयणेन च सम्बन्धितं मूल्यम् (लाभः हानिश्च)

विद्यालयमेलकाय अहम् एकं भाग्योदयचिटिका-आपणम् उद्घाटयामि । एकस्याः भाग्योदयचिटिकायाः अहं रु. 10 ग्रहीष्यामि परन्तु अहं दातुम् एतादृशं वस्तु क्रेष्यामि यस्य मूल्यं रु. 5 अस्ति।

एवं रीत्या भवती 100% लाभं स्वीकरोति।

अहं तम् उपहारं वेष्टितुं रु. 3 इत्यस्य कर्गदे तथा आवेष्टके (टेप् इत्यस्मिन्) व्ययं करिष्यामि । एवम्प्रकारेण मम व्ययः रु. 8 अस्ति यथा मम रु. 2 इत्यस्य लाभः मिलति यः $\frac{2}{8}$ ×100=25 % अस्ति।

कदाचित् यदा एकस्य वस्तुनः क्रयणं भवति तर्हि क्रयणसमये अथवा विक्रयणस्य पूर्वं किञ्चित् अतिरिक्तं धनम् अपि व्ययीभवति। एषः व्ययः क्रयमूल्ये युज्यते। एषः व्ययः कदाचित् अतिरिक्त-व्ययत्वेन गण्यते। एतस्मिन् एतादृशः व्ययः भवितुम् अर्हति यथा जीर्णोद्धारे, श्रमिकेषु, परिवहने च व्ययीभूतः राशिः।

8.4.1 क्रयमूल्यं / विक्रयमूल्यं , लाभप्रतिशतं / हानिप्रतिशतं जानन्तु

उदाहरणम् 5 सोहनः एकं प्राचीनं शीतजनित्रं रु. 2500 इत्यस्मिन् क्रीतवान्। सः रु. 500 तस्य पुनर्निर्माणे व्ययं कृतवान् तथा रु. 3300 इत्यस्मिन् विक्रीतवान्। तस्य लाभहानिप्रतिशतं जानन्तु।

समाधानम् क्रयमूल्यं = रु. 2500 + रु.500 = रु. 3000

(क्रयमूल्यं ज्ञातुम् उपरोक्तव्ययस्य योगः भवति)

विक्रयमूल्यं = रु. 3300

यथा विक्रयमूल्यं > क्रयमूल्यं, तस्य रु. 3300 - रु. 3000 रु. 300 इत्यस्य लाभः जातः एवम्प्रकारेण रु. 3000 इत्यस्मिन् तस्य रु. 300 इत्यस्य लाभः जातः। रु. 100 इत्यस्मिन् तस्य कति लाभः भविष्यति।

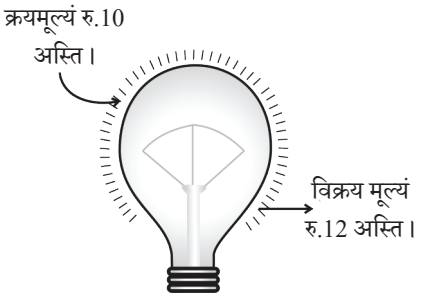
रु. 100 इत्यस्मिन् लाभः = $\frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$ लाभप्रतिशतं

$$(P\%) = \frac{\text{लाभः}}{\text{क्रयमूल्यम्}} \times 100\%$$

प्रयासं करोतु

1. यदि लाभस्य परिमाणं 5% अस्ति तर्हि निम्नलिखितस्य विक्रयमूल्यं जानन्तु।
   (a) रु. 700 इत्यस्य एकं द्विचक्रिकायानं यस्योपरि अतिरिक्त-व्ययः रु. 50 अस्ति।
   (b) रु. 1150 इत्यस्मिन् एकस्य घासकर्त्तनयन्त्रस्य क्रयणं जातं यस्मिन् 50 रुप्यकस्य व्ययः परिवहनव्ययस्य रूपे अभवत्।
   (c) रु. 560 इत्यस्मिन् क्रीतम् एकं व्यजनं यस्मिन् 40 रुप्यात्मकस्य समीचीनार्थं व्ययः अभवत्।

उदाहरणम् 6 एकः आपणिकः 200 विद्युद्दीपः 10 रुप्यकात्मकेन प्रतिविद्युद्दीपं क्रीतवान्। तेषु 5 विद्युद्दीपाः असमीचीनाः आसन् तथा तान् क्षिप्तवान्। अवशिष्टविद्युद्दीपं 12 रुप्यात्मके प्रति विद्युद्दीपं विक्रीतवान्। लाभस्य हानेश्च प्रतिशतं जानन्तु।



समाधानम् 220 विद्युद्दीपानां क्रयमूल्यं = 200 × रु.10 = रु. 2000

5 विद्युद्दीपाः असमीचीनाः आसन् अत एव अवशिष्टानां विद्युद्दीपानां संख्या = 200-5 = 195 एतेषां विक्रयणं 12 रुप्यात्मके मूल्ये जातम्।

195 विद्युद्दीपानां विक्रयमूल्यं =195 × रु.12 = रु. 2340

अत्र ' विक्रयमूल्यं > क्रयमूल्यं' अस्ति अत एव स्पष्टतः तस्य लाभः जातः।

लाभः = रु.2340 - रु. 2000 = रु. 340

रु. 2000 इत्यस्मिन् रु. 340 इत्यस्य लाभः जातः तर्हि रु. 100 इत्यस्मिन् कति रुप्यकाणां लाभः भविष्यति ?

प्रतिशतं लाभः = $\frac{340}{2000} \times 100\% = 17\%$

उदाहरणं 7 मीनू व्यजनद्वयं 1200 रुप्यात्मके क्रीतवती। सा एकं व्यजनं 5% हानिना तथा द्वितीयं व्यजनं 10% लाभेन साकं विक्रीतवती। प्रत्येकं व्यजनस्य विक्रयमूल्यं जानन्तु। आहत्य लाभं हानिञ्च जानन्तु।

समाधानम् प्रत्येकं व्यजनस्य क्रयमूल्यं = रु.1200।

एकं व्यजनं 5% हानिना साकं विक्रयति।

अस्य अर्थः अयमेव यत् यदि क्रयमूल्यं रु. 100 अस्ति तर्हि विक्रयमूल्यं रु. 95 अस्ति। अत एव क्रयमूल्यं रु.1200 अस्ति तदा विक्रयमूल्यं = $\frac{95}{100} \times$ रु.1200 = रु.1140।

द्वितीयं व्यजनं 10 लाभेन साकं विक्रयति अस्य तात्पर्यम् इदमेव यत् यदि क्रयमूल्यं रु. 100 अस्ति तर्हि विक्रयमूल्यं रु. 110 अस्ति।

अत एव यदा क्रयमूल्यं रु. 1200 अस्ति तदा विक्रयमूल्यं = $\frac{110}{100}$ × रु.1200 =1320

आहत्य लाभः अभवत् उत हानिः ?

एतत् ज्ञातुं यत् आहत्य लाभः अभवत् अथवा हानिः वयं संयुक्त क्रयमूल्यम् एवं संयुक्तविक्रयमूल्यं ज्ञातुम् आवश्यकता अस्ति।

आहत्यक्रयमूल्यं = रु.1200 + रु. 1200 = रु. 2400

आहत्यविक्रयमूल्यं = रु.1140 + रु.1320 = रु. 2460

यतो हि आहत्य विक्रयमूल्यं > आहत्य क्रयमूल्यम्

अत एव रु. (2460 - 2400) अर्थात् रु. 60 इत्यस्य लाभः अभवत्।

प्रयासं करोतु

एकः आपणिकः दूरदर्शनद्वयस्य क्रयणं 10,000 रुप्यकात्मकेन कृतवान्। सः एकं दूरदर्शनं 10% हानिना साकम् अथ द्वितीयं 10% लाभेन साकं विक्रीतवान्। जानन्तु यत् आहत्य अस्मिन् क्रमे लाभः अभवत् अथवा हानिः।

8.5 विक्रयणकरः

अध्यापकः कक्ष्यायाम् एकं धनविवरणपत्रं दर्शितवान् यस्मिन् निम्नलिखितशीर्षकं लिखितम् आसीत्

पत्रसंख्या			दिनाङ्कः	
खाद्यसूची				
क्र.सं.	वस्तु	मात्रा	दर	राशिः
		देयराशिः + रु. विक्रयणकरः		
	आहत्ययोगः			

ST इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् विक्रयणकरः यदा वयं वस्तूनि क्रीणामः तदा अस्य देयराशेः दानस्यापि आवश्यकता भवति।

कस्यापि वस्तुनः विक्रयणे विक्रयणकरः सर्वकारेण स्वीक्रियते। एतं करम् आपणिकः ग्राहकात् स्वीकरोति तथा सर्वकारं प्रति ददाति। अत एव एषः करः सर्वदैव वस्तुनः विक्रयमूल्ये संयोजितः भवति तथा देयधनपत्रे एतस्य योगः भवति। अद्यत्वे वस्तूनां मूल्ये एषः करः (VAT) रूपेण युज्यते।

उदाहरणम् 8 (विक्रयणकरस्य ज्ञानम्) कस्मिंश्चित् आपणे युगलयोः चक्रान्वित-उपानहोः मूल्यं रु. 450 आसीत्। दत्तस्य विक्रयणकरस्य मूल्यं 5% आसीत्। धनविवरणपत्रस्य देयराशिं जानन्तु।

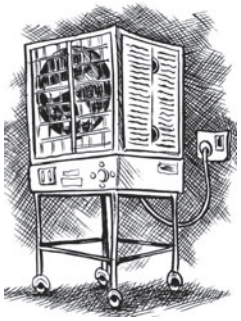
समाधानम् रु. 100 इत्यस्मिन् देयराशीनां करः रु. 5 आसीत्।

रु. 450 इत्यस्मिन् देयराशीनां करः अस्ति = $\frac{5}{100} \times$ रु.450 = रु.22.50

धनविवरणपत्रस्य देयराशिः = क्रयमूल्यं + विक्रयणकरः

= रु. 450 + रु. 22.50 = रु. 472.50

उदाहरणम् 9 वैट-माध्यमेन वहीदा एकं शीतयन्त्रं 10% करसहितेन 3300 रुप्यकात्मकेन क्रीतम्। वैट इत्यस्य योगात् पूर्वं शीतयन्त्रस्य मूल्यं जानन्तु।



समाधानम् मूल्ये वैट इत्यपि युक्तं वर्त्तते।

अतः 10% वैट इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् यदि वैटरहितमूल्यं 100 रुप्यकम् अस्ति तर्हि वैटसहितमूल्यं 110 रुप्यकम् अस्ति। अधुना यदि वैटसहितं मूल्यं 110 रुप्यकम् अस्ति तर्हि वास्तविकमूल्यं 100 रुप्यम् अस्ति।

अतः यदा करसहितमूल्यं 3300 रुप्यकम् अस्ति तर्हि वास्तविकं मूल्यं = $\frac{100}{110} \times$ रु.3300 = रु.3000

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखितवस्तूनां क्रयणे यदि 5% विक्रयणकरः युज्यते तर्हि प्रत्येकं विक्रयमूल्यं जानन्तु।
   (i) 50 रुप्यात्मकस्य एकम् अङ्गवस्त्रम्।
   (ii) फेनकद्वयं प्रत्येकं मूल्यं 35 रुप्यात्मकम्।
   (iii) 15 रुप्यकैः प्रतिकिलोग्राममात्रया 5 किलोग्रामपरिमितं गोधूमचूर्णकम्।
2. निम्नलिखितवस्तुनः मूल्ये यदि 8 % वैटसम्मिलितम् अस्ति तर्हि वास्तविकं मूल्यं जानन्तु।
   (i) 13500 रुप्यकैः क्रीतम् एकं दूरदर्शनम्।
   (ii) 180 रुप्यकैः क्रीता एका शिरःफेनककूपी।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

1. कामपि संख्यां द्विगुणिते कृते सति तस्यां संख्यायां 100% वृद्धिः भवति। यदि वयं तां संख्यां अर्धं कुर्मः तर्हि कति प्रतिशतं ह्रासः भविष्यति ?
2. 2400 रुप्यकाणां तोलनायां 2000 रुप्यकं कति प्रतिशतं न्यूनम् अस्ति। किम् एतत् प्रतिशतं तावदेव अस्ति यावत् 2000 रुप्यकाणां तोलनायां 2400 रुप्यकम् अधिकम् अस्ति ?

प्रश्नावली 8.2

1. एकस्य जनस्य वेतने 10% वृद्धिः भवति। यदि तस्य नवीनवेतनं 1,54,000 रुप्यकाणि सन्ति तर्हि तस्य मूलवेतनं जानन्तु।
2. रविवासरे 845 जनाः जन्तुशालां गतवन्तः सोमवासरे केवलं 169 जनाः गतवन्तः। जन्तुशालायाः भ्रम्यमाणानां जनानां संख्या सोमवासरे कति प्रतिशतं न्यूना जाता ?
3. एकः आपणिकः 2400 रुप्यकैः 80 वस्तूनां क्रयणं करोति तथा तानि वस्तूनि 16% लाभं नीत्वा विक्रयति। एकस्य वस्तुनः विक्रयमूल्यं जानन्तु।

4. एकस्य वस्तुनः मूल्यं 15,500 रुप्यकम् आसीत् । 450 रुप्यकम् अस्य पुनर्निर्माणे व्ययी कृतवान् । यदि तत् वस्तु 15 लाभांशे विक्रयति तर्हि तस्य विक्रयमूल्यं जानन्तु ।
5. एकं वी.सी.आर-यन्त्रं तथा दूरदर्शनम् इति द्वयम् अपि प्रत्येकं 8000 रुप्यकैः क्रीतं । आपणिकः वी.सी.आर-यन्त्रे 4% हानिं सोढवान् तथा दूरदर्शने 8% लाभं प्राप्तवान् ।
6. विशेषविक्रयणक्रमे एकः आपणः सर्वेषां वस्तूनां अङ्कितमूल्येषु 10 % लाभांशं ददाति 1450 रुप्यकाङ्कितम् एकं जीन्स-उरुकं तथा युतकद्वयं यस्मिन् प्रत्येकम् अङ्कितं मूल्यं 850 रुप्यकम् अस्ति । एतं क्रयणार्थं कश्चित् ग्राहकः कति धनराशिं दद्यात् ?

7. एकः दोग्धा स्व द्वे महिष्यौ 20,000 रुप्यकैः प्रतिमहिषिपरिमाणेन विक्रीतवान् । एकस्यां महिष्यां 5% तस्य लाभः जातः तथा द्वितीयस्यां तस्य 10% हानिः अभवत् । अस्मिन् क्रयविक्रयणे तस्य आहत्य लाभं हानिं वा जानन्तु । (सङ्केतः सर्वप्रथमं प्रत्येकं क्रयमूल्यं जानन्तु)
8. एकस्य दूरदर्शनयन्त्रस्य मूल्यं 13,000 रुप्यकम् अस्ति । अस्मिन् 12% धनेन विक्रयणमूल्यं गृह्णाति यदि विनोदः एतत् दूरदर्शनं क्रीणाति तर्हि देयधनराशिं जानन्तु ।
9. अरुणः युगलौ चक्रान्वितौ उपानहौ एकस्मात् विशेष-आपणात् क्रीत्वा आनयत् यस्मिन् लाभांशस्य भागः 20 प्रतिशतम् आसीत् यदि तेन 1600 रुप्यकं दत्तं तर्हि अङ्कितं मूल्यं जानन्तु ।
10. अहम् एकं केश-शोषकं 8% वैटसहितं 5400 रुप्यकैः क्रीतवान् । वैट इत्यस्य योजनात् पूर्वं तस्य मूल्यं जानन्तु ।

8.6 चक्रवृद्धिकुसीदः

सम्भवतः भवन्तः एतादृशं वचनं श्रृणुयुः यत् वित्तकोषे सावधिसञ्चितधने एकवर्षस्य कुसीदः 9% वार्षिकपरिमाणेन अथवा संरक्षितवित्तकोषपत्रके कुसीदपरिमाणात् 5% वार्षिकम् ।

वित्तकोषः अथवा पत्रालयः सदृक् संस्थानां पार्श्वे संरक्षिते धने एताभिः संस्थाभिः दत्तम् अतिरिक्तं धनं कुसीदः इति उच्यते । यदा जनाः धनस्य कृते ऋणं नयन्ति तर्हि तैः एव कुसीदस्य धनं दीयते । वयं साधारणकुसीदस्य परिकलनं पूर्वतः एव जानीमः ।

उदाहरणम् 10 10,000 रुप्यकात्मकः राशिः 15% वार्षिककुसीदपरिमाणे 2 वर्षाय ऋणं गृह्यते । अस्मिन् राशौ साधारणकुसीदः तथा 2 वर्षान्ते देयधनराशिं जानन्तु ।

समाधानम् 100 रुप्यात्मके 1 वर्षाय देयकुसीदः 15 रुप्यकात्मकः अस्ति ।

अत एव 10,000 इत्यस्य 1 वर्षस्य कुसीदः $= \frac{15}{110} \times 10000 =$ रु.1500

2 वर्षस्य कुसीदः = रु.1500×2 = रु.3000

2 वर्षस्य अन्ते देयधनराशिः = मूलधनम् + कुसीदः

= रु.10000 + रु.3000 = रु.13000

प्रयासं करोतु

5 वार्षिकपरिमाणात् 15000 रुप्यकस्य 2 वर्षस्यान्ते कुसीदं तथा देयराशिसहितम् आहत्य राशिं जानन्तु।

मम पिता किञ्चित् धनं 3 वर्षस्य कृते पत्रालये सञ्चितम् कृतवान्। प्रत्येकं वर्षं धनस्य वृद्धिः गतवर्षस्य तोलनायाम् अधिकं भवति।

अस्माकं पार्श्वे वित्तकोषे किञ्चित् धनम् अस्ति। प्रतिवर्षं कश्चित् कुसीदः अस्मिन् धने युज्यते यत् वित्तविवरणिकायां (पासबुक इति) दर्शितः भवति। योज्यमानः एषः कुसीदः प्रत्येकं वर्षे समानः नास्ति प्रत्येकं वर्षे अस्मिन् वृद्धिः जायते।

मम पिता किञ्चित् धनं 3 वर्षस्य कृते पत्रालये सञ्चितम् कृतवान्। प्रत्येकं वर्षं धनस्य वृद्धिः गतवर्षस्य तोलनायाम् अधिकं भवति।

आगच्छन्तु वयम् एकस्मिन् उदाहरणे चर्चां कुर्मः तथा प्रत्येकं वर्षस्य पृथक्-पृथक् कुसीदं जानीमः। प्रत्येकं वर्षे अस्माकं सञ्चितराशिः अथवा धनं परिवर्तितं भवति।

चक्रवृद्धिकुसीदस्य परिकलनम्

8% कुसीदस्य परिमाणेन हिना 2 वर्षाय 20,000 रुप्यकात्मकं गृह्णाति यद्यपि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजयति। 2 वर्षस्य अन्ते चक्रवृद्धिकुसीदः एवं तद्द्वारा देयधनराशिं जानन्तु।

असलमः अध्यापकात् पृच्छति यत् किम् एतस्य अर्थः अयम् अस्ति यत् वयं प्रत्येकं वर्षस्य कुसीदं पृथक्-पृथक् रूपेण जानीमः। अध्यापकः अवदत् आम् तथा तं निम्नलिखितचरणानाम् उपयोगं कुर्वन्तु भवन्तः इत्यपि अकथयत्।

1. एकवर्षस्य साधारणं कुसीदं जानन्तु स्वीकुर्वन्तु प्रथमवर्षस्य मूलधनम् P_1 अस्ति।

   अत्र P_1 = रु. 20,000

   SI_1 = 8% वार्षिकपरिमाणेन प्रथमवर्षस्य साधारणकुसीदः

   $= \frac{20000 \times 8}{100}$ = रु.1600

2. तत्पश्चात् देयधनराशिम् अथवा प्राप्तधनराशिं जानन्तु। एतत् 2 वर्षस्य कृते मूलधनं भवति। प्रथमवर्षस्य अन्ते राशिः = $P_1 + SI_1$ = रु. 20000 + रु.1600

   = रु. 21600 = P_2 (द्वितीयवर्षस्य मूलधनम्)

3. अस्मिन् राशौ द्वितीयवर्षस्य कुसीदं जानन्तु।

SI_2 = 8% वार्षिकपरिमाणेन द्वितीयवर्षस्य साधारणं कुसीदः

$= \text{रु.} \frac{21600 \times 8}{100} = \text{रु.}1728$

4. द्वितीयवर्षस्य अन्ते दीयमानं राशिम् अथवा प्राप्यमाणं राशिं जानन्तु।

द्वितीयवर्षस्य अन्ते राशिः $= P_2 + SI_2$

$= \text{रु.}\ 21600 + \text{रु.}1728$

$= \text{रु.}\ 23328$

आहत्य देयः कुसीदः $= \text{रु.}1600 + \text{रु.}1728$

$= \text{रु.}\ 3328$

रीता पृष्टवती किं कुसीदस्य राशिः साधारणकुसीदस्य कृते भिन्नः भविष्यति। अध्यापकः तं 2 वर्षस्य साधारणकुसीदं जानन्तु अथ स्वयमेव भेदम् अनुभवन्तुइति अवदत्।

2 वर्षस्य साधारणं कुसीदः $= \text{रु.} \frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = \text{रु.}3200$

रीता अवदत् यत् चक्रवृद्धिकारणेन हिनायाः कृते 128 रुप्यकम् अधिकं दातुं भविष्यति। आगच्छन्तु अधुना वयं साधारणकुसीदः अथ चक्रवृद्धिकुसीदः इत्यनयोः अन्तरं पश्यामः। 100 रुप्यकात् आरम्भं कुर्मः सारणीं पूरयितुं प्रयासं कुर्मः।

अस्य अर्थः अयम् अस्ति यत् भवान् तदानीं यावत् दत्ते कुसीदे कुसीदं ददाति।

		साधारणकुसीदस्य अन्तर्गते	चक्रवृद्धिकुसीदस्य अन्तर्गते
प्रथमवर्षः	मूलधनं	₹ 100.00	₹ 100.00
	10% परिमाणात् कुसीदवर्षस्य	₹ 10.00	₹ 10.00
	अन्ते राशिः	₹ 110.00	₹ 110.00
द्वितीयवर्षः	मूलधनं	₹ 100.00	₹ 110.00
	10% परिमाणात् कुसीदवर्षस्य	₹ 10.00	₹ 11.00
	अन्ते राशिः	₹ (110 + 10) = ₹120.00	₹ 121.00
तृतीयवर्षः	मूलधनं	₹ 100.00	₹ 121.00
	10% परिमाणात् कुसीदवर्षस्य	₹ 10.00	₹ 12.10
	अन्ते राशिः रु.100.00	₹ (120 + 10) = ₹ 130.00	₹ 133.10

ध्यानं ददातु यत् 3 वर्षे

साधारणकुसीदेन प्राप्तः कुसीदः = रु. (130 - 100) = रु. 30

चक्रवृद्धिकुसीदेन प्राप्तः कुसीदः = रु. (133.10 - 100) = रु. 33.10

एतत् अपि ध्यातव्यं यत् साधारणकुसीदस्य अन्तर्गते प्रत्येकं वर्षे मूलधनं समानं भवति यद्यपि चक्रवृद्धिकुसीदस्य अन्तर्गते एतत् प्रत्येकं वर्षस्य पश्चात् परिवर्त्तयति।

8.7 चक्रवृद्धिकुसीदाय सूत्रस्य निगमनम्

जुबेदा स्व अध्यापकात् पृच्छति किं चक्रवृद्धिकुसीदं ज्ञातुं कश्चित् सरलः विधिः अस्ति ? अध्यापकः अवदत् चक्रवृद्धिकुसीदं ज्ञातुं एकः संक्षिप्तविधिः अस्ति। आगच्छन्तु एतत् ज्ञातुं वयं प्रयत्नं कुर्मः।

स्वीकुर्वन्तु R% वार्षिककुसीदस्य परिणामात् मूलधनं P_1 इत्यस्मिन् कुसीद- वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति। स्वीकुर्वन्तु =रु.5000 तथा R = 5% वार्षिकं तदा उपर्युक्तचरणानां सहायतया -

1. $SI_1 = \text{रु.} \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ अथवा $SI_1 = \text{रु.} \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

अत एव $A_1 = 5000 + \text{रु.} \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ अथवा $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) = \text{रु.}P_2$ $= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \text{रु.}P_2$

$SI_2 = 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) \text{रु.} \frac{5 \times 1}{100}$ अथवा $SI_2 = \text{रु.} \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= \text{रु.} \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$= \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$A_1 = 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $A_2 = P_2 + SI_2$

$+ \text{रु.} \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) + P_1 \frac{R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= \text{रु.}5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= \text{रु.}5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = P_3$ $= P_1\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = P_3$

एवमेव अग्रे वर्द्धनक्रमे n वर्षस्य अन्ते आहत्य राशिः

$A_n = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$ भविष्यति

अथवा वयं कथयितुं पारयामः यत् $A=P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

जुबेदा उक्तवती परन्तु यदा अस्य उपयोगं वयं कुर्मः तदा वयं केवलं वर्षस्य अन्ते आहत्य देयराशीनां सूत्रं प्राप्नुमः चक्रवृद्धिकुसीदस्य सूत्रं न। अरुणा सत्वरम् एव उक्तवती यत् वयं जानीमः -

चक्रवृद्धिकुसीदः= आहत्यराशिः - मूलधनम्

अर्थात् CI = A - P अत एव वयं चक्रवृद्धिकुसीदम् अपि सरलतया ज्ञातुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 11 12,600 रुप्यकस्य 2 वर्षाय 10% वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदं जानन्तु यद्यपि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।

समाधानम् वयं प्राप्तवन्तः $A=P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

अत्र मूलधनं (P) = रु.12600 परिमाणम् (R) = रु. 10

वर्षाणां संख्या (n) = 2

$$A = \text{रु.}12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = \text{रु.}12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= \text{रु.}12600\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}=15246$$

चक्रवृद्धिकुसीदः =A - P = रु.15246 - रु.12600 = रु.2646

प्रयासं करोतु

1. 8000 रुप्यकस्य 2 वर्षाय 5% वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदं जानन्तु यदि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।

8.8 परिमाणस्य वार्षिकम् अथवा अर्धवार्षिकं संयोजनम्

सम्भवतः भवन्तः ज्ञातुम् एषिष्यन्ति यत् परिमाणम् इत्यस्य पश्चात् वार्षिकसंयोजनं कथं लिखितम् आसीत्। किम् अस्य कश्चित् अर्थः अस्ति वा ?

अवश्यमेव अस्य अर्थः अस्ति यतो हि वयं कुसीदस्य परिमाणस्य अर्धवार्षिकम् अथवा त्रिमाहस्य संयोजनम् अपि कर्तुं शक्नुमः।

आगच्छन्तु वयं पश्यामः यत् यदि कुसीदस्य वार्षिकम् अथवा अर्धवार्षिकं संयोजनं भवेत् तर्हि 100 रुप्यकस्य कुसीदे कियत् परिवर्त्तनं भविष्यति ?

यदा कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः न स्यात् तदा समयावधिः तथा परिमाणम्।

सः समयावधिः यस्मात् पश्चात् प्रत्येकं बारं नवीनं मूलधनं निर्मातुंकुसीदस्ययोगोभवति।सःरूपान्तरणविधिःभवति। यदा कुसीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति तदा एकस्मिन् वर्षे प्रत्येकं षण्मासस्य **रूपान्तरणविधेः** विभागद्वयं भवति। एतादृश्यां परिस्थितौ अर्धवार्षिक परिमाणं वार्षिकपरिमाणस्य अर्धं भविष्यति। यदि कुसीदं त्रिमासे संयोजयामः तदा किं भविष्यति ?एतादृश्यां स्थितौ एकस्मिन् वर्षे 4 रूपान्तरण-अवधयः भविष्यन्ति तथा त्रिमासस्य परिमाणं वार्षिक-परिमाणस्य चतुर्थभागः भविष्यति।

P = 100 रुप्यकं तथा 10% वार्षिकपरिमाणम्	P = 100 रुप्यकं तथा 10% वार्षिकपरिमाणम्
प्रत्येकं कुसीदस्य संयोजन-वार्षिक-समयावधिः 1 वर्षम् अस्ति।	कुसीदस्य संयोजन-अर्धवार्षिक-समयावधिः 6 मासाः अथवा वर्षम् $\frac{1}{2}$ अस्ति।
I=(10×10×1)/100=रु.10	$I = \frac{10\times10\times\frac{1}{2}}{100} = रु.\ 5$
A = रु.100 + रु.10 = रु.110	A = रु.100 + रु. 5 =रु.105 अधुना अग्रिमषण्मासानां कृते P = रु.105
	अतः I=रु. $\frac{10\times10\times\frac{1}{2}}{100} = रु.5.25$ तथा A = रु.105 + रु. 5.25 = रु.110.25

परिमाणम् अर्धं भवति

किं भवन्तः दृष्टवन्तः यत् यदि कुसीदार्धवार्षिकं संयोजितं भवति तर्हि वयं कुसीदस्य अभिकलनं बारद्वयं कुर्मः अत एव अवधिः द्विगुणितः भवति तथा परिमाणम् अर्धं भवति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखिते कुसीदस्य संयोजनाय समयावधिं परिमाणञ्च जानन्तु।

1. $1\frac{1}{2}$ वर्षाय 8% वार्षिकपरिमाणोपरि ऋणात्मके एकस्मिन् राशौ कुसीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।
2. 2 वर्षाय 4% वार्षिकपरिमाणोपरि ऋणात्मके एकस्मिन् राशौ कुसीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

एकः राशिः 16% वार्षिकपरिमाणोपरि 1 वर्षाय ऋणं गृह्णाति यदि कुसीदः प्रत्येकं मासत्रयानन्तरं संयोजितः भवति तर्हि 1 वर्षे कति बारं कुसीदः देयः भविष्यति।

उदाहरणम् 12 यदि कुसीदस्य संयोजनम् अर्धवार्षिकं भवति तदा $1\frac{1}{2}$ वर्षाय 10% वार्षिकपरिमाणोपरि गृहीतस्य ऋणस्य 12,000 रुप्यकस्य ऋणदानाय कियत् राशिःदातव्यः।

समाधानम्

प्रथमं षण्मासानां कृते मूलधनम् रु. 12,000	प्रथमं षण्मासानां कृते मूलधनम् रु. 12,000
$1\frac{1}{2}$ वर्षेषु 3 षण्मासिकी भवति अत एव कुसीदसंयोजनं 3 बारं भविष्यति। कुसीदस्य परिमाणं =10% इत्यस्य अर्धं = 5% अर्धवार्षिकः $A=P\,(1+R/100)^n$ $= रु.12000(1+\frac{R}{100})^3$ $= रु.12000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$ = रु.13891.50	कालः = 6 मासः = $\frac{6}{12}$ वर्षः = $\frac{1}{2}$ वर्षः परिमाणम् = 10% $I=रु.\ \frac{12000\times10\times\frac{1}{2}}{100}=रु.600$ A=P+I=रु.12000+रु.600 = रु.12600 एतत् अग्रिमषण्मासस्य कृते मूलधनम् अस्ति। $I=रु.\ \frac{12600\times10\times\frac{1}{2}}{100}=रु.630$ तृतीय-अवधेः मूलधनम् = रु.12600+रु.630 = रु.13230 $I=रु.\ \frac{13230\times10\times\frac{1}{2}}{100}=रु.661.50$ A=P+I=रु.13230+रु.661.50=13891.50

प्रयासं करोतु

निम्नलिखिताय देयराशिं जानन्तु

1. 2400 रुप्यात्मके 5% वार्षिकपरिमाणात् कुसीदस्य वार्षिकसंयोजनं कृत्वा 2 वर्षान्ते।
2. 1800 रुप्यात्मके 8% वार्षिकपरिमाणात् कुसीदस्य त्रिमासिकसंयोजनं कृत्वा 1 वर्षान्ते।

उदाहरणम् 13 10,000 रुप्यकस्य राशेः 1 वर्षाय 3 मासाय च वार्षिकपरिमाणात् निवेशे कृते सति चक्रवृद्धिकुसीदं जानन्तु यद्यपि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।

समाधानम् मयूरी सर्वप्रथमं समयं वर्षेषु परिवर्तितवति।

$$1 \text{ वर्षः } 3 \text{ मासाः} = 1\ \frac{3}{12}\ \text{वर्षः } 1\ \frac{1}{4}\ \text{वर्षः}$$

मयूरी ज्ञातसूत्रे मानं रक्षितुं प्रयत्नं कृतवती तथा

$A = रु.10000\left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$ इति प्राप्तवती।

सा व्याकुला आसीत्। सा स्वकीय-अध्यापकात् पृष्टवती यत् सा भिन्नरूपीघातं कथं ज्ञास्यति। अध्यापकः तस्यै निम्नलिखितसङ्केतं दत्तवान्।

प्रथम-अवधेः एकः सम्पूर्णः भागः अर्थात् 1 वर्षाय राशिं जानन्तु। तत्पश्चात् एतं मूलधनरूपे उपयोगं कृत्वा $\frac{1}{4}$ वर्षस्य साधारणं कुसीदं जानन्तु।

$$A = \text{रु.}10000\left(1+\frac{17}{200}\right)$$

$$= \text{रु.}10000 \times \frac{217}{200} = \text{रु.}10850$$

अधुना अयं राशिः अग्रिम $\frac{1}{4}$ वर्षाय मूलधनस्य कार्यं करिष्यति।

वयं रु. 10,850 इत्यस्य $\frac{1}{4}$ वर्षाय साधारणं कुसीदं जानीमः।

साधारणं कुसीदः (SI) = रु. $\frac{10850\times\frac{1}{4}\times17}{100\times2}$

$$= \text{रु.}\frac{10850\times1\times17}{800} = \text{रु. } 230.56$$

प्रथमवर्षस्य कुसीदः = रु. 10850 - रु. 10000 = रु. 850

तथा अग्रिम $\frac{1}{4}$ वर्षस्य कुसीदः= रु. 230.56

इत्थम् आहत्य चक्रवृद्धिकुसीदः= 850 + 230.56 = रु. 1080.56

8.9 चक्रवृद्धिकुसीदस्य सूत्रस्य अनुप्रयोगः

कतिचन एतादृश्यः स्थितयः सन्ति यत्र वयं चक्रवृद्धिकुसीदस्य आहत्य राशिं ज्ञातुं सूत्रस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः। एतेषु कानिचन निम्नलिखितानि सन्ति।

(i) जनसंख्यायां वृद्धिः (अथवा ह्रासः)

(ii) यदि विषाणुवृद्धेः परिमाणं ज्ञातम् अस्ति तर्हि तस्य आहत्य वृद्धिं जानन्तु।

(iii) कस्यापि वस्तुनः मानं जानन्तु यदि मध्यवर्तिवर्षेषु अस्य मूल्ये वृद्धिः अथवा न्यूनता भवति।

उदाहरणम् 14 1997 वर्षस्यान्तेकस्यापिनगरस्य जनसंख्या 20,000 आसीत्। अस्यां 5% वार्षिकपरिमाणात् वृद्धिः जाता। 2000 वर्षस्यान्ते तस्य नगरस्य जनसंख्या का इति जानन्तु।

समाधानम् प्रत्येकं वर्षे जनसंख्यायां 5% वृद्धिः भवति अत एव प्रत्येकं नववर्षस्य नवीना जनसंख्या भवति। इत्थं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् एषा संयोजितरूपे वर्धते।

1998 वर्षारम्भे जनसंख्या =20,000 (एतां वयं प्रथमवर्षस्य कृते मूलधनं मन्यामहे)

5% परिमाणात् वृद्धिः $\frac{5}{100}\times 20{,}000=1000$

1999 वर्षस्य जनसंख्या = 20000+1000=21000

एतत् द्वितीयवर्षाय मूलधनं मन्यन्ताम्।

5% परिमाणात् वृद्धिः $= \frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

2000 वर्षे जनसंख्या $= 21000 + 1050 = 22050$

5% परिमाणात् वृद्धिः $= \frac{5}{100} \times 22050 = 1102.5$

2000 वर्षस्यान्ते जनसंख्या $= 22050 + 1102.5 = 23152.5$

अथवा सूत्राणां सहायतया 2000 वर्षस्यान्ते जनसंख्या $= 20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

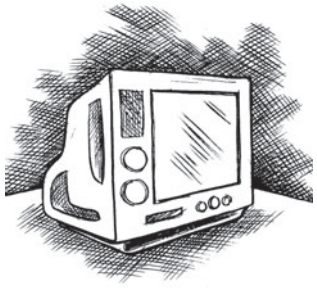
$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 23152.5$

अत एव प्रायशः जनसंख्या $= 23,153$

अरुणः अपृच्छत् यदि जनसंख्यायां न्यूनता भवति तर्हि किं करणीयम् तदा अध्यापकः निम्नलिखित-उदाहरणं चर्चितवान्।

उदाहरणम् 15 एकं दूरदर्शनं 21,000 रुप्यकैः क्रीतम्। एकवर्षस्य पश्चात् दूरदर्शनस्य मूल्ये 5% अवमूल्यनम् अभवत् (अवमूल्यनस्य अर्थः अस्ति यत् वस्तुनः उपयोगकारणात् एवं समयकारणात् तस्य मूल्ये न्यूनता)। एकवर्षस्य पश्चात् दूरदर्शनस्य मूल्यं जानन्तु।

समाधानम् मूलधनम् = रु.21000



अवमूल्यनं (न्यूनता) प्रतिवर्षं = रु. 21,000 इत्यस्य 5%

$= \text{रु.} \frac{21,000 \times 5 \times 1}{800} = \text{रु. } 1050$

एकवर्षस्य अन्ते दूरदर्शनस्य मूल्यं = रु.21,000 -रु.1050 = रु.19,950

विकल्पतः वयम् एतत् निम्नलिखितविधिना साक्षात् प्राप्तुं शक्नुमः।

1 वर्षस्यान्ते मूल्यं $= \text{रु.}21,000\left(1-\frac{5}{100}\right)$

$= \text{रु.}21,000 \times \frac{19}{20} = \text{रु.}19,950$

प्रयासं करोतु

1. 10,500 मूल्यात्मकस्य एकस्य यन्त्रस्य 5% परिमाणात् अवमूल्यनं भवति। एकवर्षस्य पश्चात् अस्य मूल्यं जानन्तु ।
2. एकस्य नगरस्य वर्त्तमानजनसंख्या 12 लक्षम् अस्ति यदि वृद्धेः परिमाणात् 4% अस्ति तर्हि 2 वर्षपश्चात् नगरस्य जनसंख्यां जानन्तु।

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखिताय आहत्य राशिं तथा चक्रवृद्धिकुसीदं जानन्तु।

(a) 10,800 रुप्यके 3 वर्षाय $12\frac{1}{2}$ % वार्षिकपरिमाणात् वार्षिकरूपेण संयोजिते सति।

(b) 18,000 रुप्यके 2 $\frac{1}{2}$ वर्षाय 10 % वार्षिकपरिमाणात् वार्षिकरूपेण संयोजिते सति।

(c) 62,500 रुप्यके 1 $\frac{1}{2}$ वर्षाय 8 % वार्षिकपरिमाणात् अर्धवार्षिकरूपेण संयोजिते सति।

(d) 8000 रुप्यके 1 वर्षाय 9% वार्षिकपरिमाणात् अर्धवार्षिकरूपेण संयोजिते सति।

(भवन्तः सत्यापितुं साधारणकुसीदस्य सूत्रस्य उपयोगं कृत्वा एकवर्षस्य पश्चात् द्वितीयवर्षाय परिकलनं कर्तुं शक्नुवन्ति)

(e) 10,000 रुप्यके 1 वर्षाय 8 वार्षिकपरिमाणात् अर्धवार्षिकरूपेण संयोजिते सति।

2. कमला एकं स्कूटरयानं क्रेतुं एकस्मात् वित्तकोषात् 26400 रु. 15% वार्षिकपरिमाणात् ऋणं नीतवती यद्यपि कुसीदस्य वार्षिकसंयोजनं भवति। 2 वर्षस्य तथा 4 मासस्य अन्ते ऋणं प्रत्यावर्तितुं तस्याः कृते देयराशिः कः भविष्यति ? (सङ्केतः कुसीदं वार्षिकरूपेण संयोजयित्वा 2 वर्षायA जानन्तु तथा द्वितीयवर्षस्य आहत्य राशौ $\frac{4}{12}$ वर्षस्य साधारणं कुसीदं जानन्तु।)

3. फैबिना 3 वर्षाय 12,500 रुप्यकस्य 12% वार्षिकपरिमाणात् ऋणं नीतवती तथा राधा तादृशम् एव राशिं तावते समयाय 10% वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदे ऋणं नीतवती यद्यपि कुसीदस्य वार्षिक-संयोजनं भवति। कः अधिकं कुसीदं दास्यति तथा कियत् अधिकं दास्यति ?

4. अहं जमशेदात् 2 वर्षाय 12,000 रुप्यकस्य 6% वार्षिकपरिमाणात् ऋणं नीतवान् यदि अहम् एतं राशिं 6% वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदोपरि ऋणरूपेण अग्रहीष्यं तर्हि अहं कियत् पर्यन्तम् अतिरिक्तराशिम् अदास्यम्।

5. वासुदेवनः 12% वार्षिकपरिमाणे 60,000 रुप्यकं निवेशितवान् यदि कुसीदः अर्धवार्षिके संयोजितः भवति तर्हि जानन्तु यत् तत् (i) 6 मासस्य अन्ते (ii)1 वर्षस्य अन्ते आहत्य कियत् राशिं प्राप्स्यति ?

6. आरिफः एकस्मात् वित्तकोषात् 80,000 रुप्यकाणाम् ऋणं गृहीतवान् यदि कुसीदः 10% वार्षिकपरिमाणम् अस्ति तर्हि 1 $\frac{1}{2}$ वर्षानन्तरं तद्द्वारा देयराशौ अन्तरं जानन्तु यदि कुसीदः (i) वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति (ii) अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति।

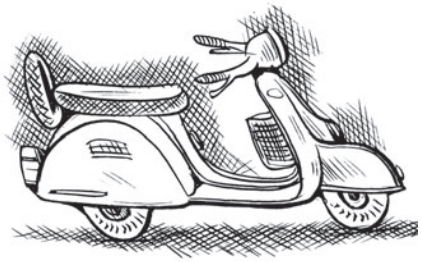
7. मारिया कस्मिंश्चित् व्यापारे 8000 रुप्यकं निवेशितवती तत् 5% वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदं दातुं भविष्यति यदि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति तर्हि

(i) वर्षद्वयस्य अन्ते तस्य नाम्ना सञ्चितराशिं जानन्तु।

(ii) तृतीयवर्षस्य कुसीदं जानन्तु।

8. 10,000 रुप्यके 1 $\frac{1}{2}$ वर्षाय 8%वार्षिकपरिमाणात् चक्रवृद्धिकुसीदः तथा आहत्य राशिं जानन्तु यद्यपि कुसीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति किमयं कुसीदः तस्मात् कुशीदात् अधिकं भविष्यति यत् तत् वार्षिकरूपेण संयोजिते कृते सति प्राप्तं भविष्यति ?

9. यदि रामः 18 मासाय 4096 रुप्यकं $12\frac{1}{2}$% वार्षिकपरिमाणात् ऋणं गृह्णाति तथा कुशीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति तर्हि जानन्तु यत् रामः आहत्य कियत् राशिं प्राप्स्यति।
10. 5% वार्षिकपरिमाणात् वर्धनशीलस्य 2003 वर्षस्य अन्ते एकस्य स्थानस्य जनसंख्या 54,000 अभवत् निम्नलिखितं जानन्तु -
    (i) 2001 वर्षे जनसंख्या
    (ii) 2005 वर्षे कियत् जनसंख्या भविष्यति ?
11. एकस्यां प्रयोगशालायां कस्मिंश्चित् निश्चितप्रयोगे विषाणूनां संख्या 2.5% प्रतिघण्टापरिमाणात् वर्धिता भवति यदि प्रयोगस्य आरम्भे विषाणूनां संख्या 5,06,000 आसन् तर्हि 2 घण्टायाः अन्ते जीवाणु संख्यां जानन्तु।
12. एकं स्कूटरयानं 42,000 रुप्यके क्रीतवान् 8 वार्षिकपरिणामात् अस्य मूल्यस्य अवमूलनं जातम्। 1 वर्षस्य पश्चात् स्कूटरयानस्य मूल्यं जानन्तु।



वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. अङ्कितमूल्योपरि प्रदत्तविशेषलाभः लाभांशः इति उच्यते।
   लाभांशः = अङ्कितमूल्यम् - विक्रयमूल्यम्
2. यदि लाभांशप्रतिशतं प्रदत्तम् अस्ति तर्हि लाभांशस्य परिकलनं भवितुम् अर्हति। लाभांशः = अङ्कितमूल्यस्य प्रतिशतम्।
3. कस्यापि वस्तुनः क्रयणानन्तरं तस्योपरि कृतम् अतिरिक्तव्ययः क्रयमूल्यान्तर्गते एव आगच्छति तथा एतत् व्ययः अतिरिक्तव्ययः कथ्यते। क्रयमूल्यम् =क्रयणीयमूल्यम् + अतिरिक्तव्ययः
4. कस्यापि वस्तुनः विक्रयणे सर्वकारेण विक्रयणकरः गृह्यते तथा एतत् देयधनपत्रस्य विवरणे युज्यते।
   विक्रयणकरः = देयधनराशेः करः %
5. गतवर्षस्य आहत्य राशिः (A = P + 1) इत्यस्मिन् परिकलितं कुसीदः चक्रवृद्धिकुसीदः इति उच्यते।
6. (i) यदि कुसीदः वार्षिकरूपेण संयोजितः भवति तर्हि
   आहत्य राशिः $(A)=P(1+\frac{R}{100})^n$; P यत्र मूलधनं, R कुसीदस्य परिमाणम् n समयः अस्ति।
   (ii) यदा कुसीदः अर्धवार्षिकरूपेण संयोजितः भवति तर्हि
   आहत्य राशिः $=P(1+\frac{R}{200})^{2n}$ $\begin{cases} \frac{R}{2} \text{ कुसीदस्य अर्धवार्षिकं परिमाणं} \\ 2n= \text{ षण्मासानां (अर्धवर्षाणां) संख्या समयः अस्ति।} \end{cases}$

अध्यायः 9

बीजीयव्यञ्जकः सर्वसमिकाश्च

9.1 व्यञ्जकः कः अस्ति ?

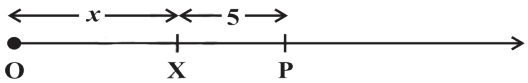
गतकक्ष्यासु वयं बीजीयव्यञ्जकविषये ज्ञानं प्राप्तवन्तः। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ इत्यादि व्यञ्जकानाम् उदाहरणानि सन्ति। भवन्तः इतोपि अधिकं व्यञ्जकं निर्मातुं शक्नुवन्ति। यथा

भवन्तः जानन्ति यत् व्यञ्जकानां निर्माणं चराणाम् अचराणां सहायतया भवति। व्यञ्जकः $2y - 5$ इति चरस्य निर्माणं y तथा अचरस्य निर्माणं 2 तथा 5 इत्यनेन भवति। व्यञ्जकः $2y - 5$ इति चरस्य निर्माणं y तथा अचरस्य निर्माणं 2 तथा 5 इत्यनेन भवति। व्यञ्जकः $4xy+7$ इति चरस्य निर्माणं x तथा y एवम् अचरस्य निर्माणं 4 तथा 7 इत्यनेन कृतं वर्त्तते।

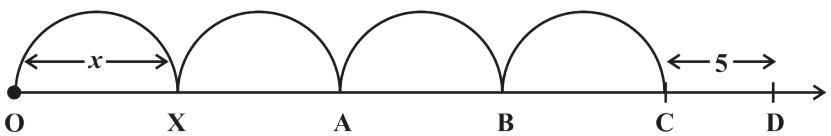
वयं जानीमः यत् व्यञ्जकः $2y - 5$ इत्यस्मिन् y इत्यस्य मानं किमपि भवितुम् अर्हति एषः व्यञ्जकः $2,5, -3,0, \frac{5}{2}, \frac{-7}{3}$ इत्यादि भवितुम् अर्हति। वास्तविकरूपे y इत्यस्य असंख्यानि विभिन्नमानानि भवितुम् अर्हन्ति। व्यञ्जकस्य चरस्य मानं परिवर्त्तने सति व्यञ्जकस्य मानं परिवर्तितं भवति। इत्थं y इत्यस्य विभिन्नमानं दाने सति $2y - 5$ इत्यस्य मानं परिवर्तितं भवति यदा $y = 2$, $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$, यदा $y = 0$, $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$ इत्यादिः। y इत्यस्य किञ्चित् दत्तेभ्यः अन्येभ्यः मानेभ्यः व्यञ्जकः $2y - 5$ इत्यस्य मानं जानन्तु।

संख्यारेखा व्यञ्जकश्च

व्यञ्जकः $x + 5$ इत्यस्य चर्चां करोति।आगच्छन्तु स्वीकुर्वन्तु यत् संख्यारेखायाः उपरि चरः x इत्यस्य स्थितिः X अस्ति।



X, संख्या रेखायां कुत्रापि भवितुम् अर्हति परन्तु एतत् निश्चितम् अस्ति यत् $x + 5$ इत्यस्य मानं, x इत्यस्य दक्षभागे 5 एककस्य दूरे P इति बिन्दुना निरूपितं भवति। एवमेव $x - 4$ इत्यस्य मानं X इत्यस्य वामभागे 4 एककस्य दूरे भविष्यति। $4x$ एवं $4x + 5$ इत्यस्य स्थितिविषये किं कथयितुम् अर्हामः ?



$4x$ इत्यस्य स्थितिः C इति बिन्दौ भविष्यति। मूलबिन्दुतः C इत्यस्य दूरी X इत्यस्य दूरीतः चतुर्गुणः भविष्यति। $4x + 5$ इत्यस्य स्थितिःD, C इत्यस्य दक्षभागे 5 एककस्य दूरीपर्यन्तं भविष्यति।

प्रयासं करोतु

- एकचरीय द्विचरीयव्यञ्जकानां पञ्च-पञ्च उदाहरणानि ददतु।
- x , x - 4 , 2x + 1, 3x - 2 इति संख्यारेखायां दर्शयन्तु।

9.2 पदं , गुणनखण्डः गुणाङ्कश्च

4x + 5 इति व्यञ्जकं स्वीकुर्वन्तु। एषः व्यञ्जकः 4x एवं 5 पदद्वयेन निर्मितः। पदानि संगृह्य व्यञ्जकः भवति पदं स्वयम् अपि गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे निर्मातुं शक्यते। 4x पदं स्वयमपि गुणनखण्डानां 4 तथा x इत्यस्य गुणनफलम् अस्ति। पदं 5 केवलं एकेन गुणनखण्डेन 5 इत्यनेन निर्मितम् अस्ति।

प्रयासं करोतु

प्रयत्नं कुर्वन्तु $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदस्य गुणाङ्कं परिचिन्वन्तु।

व्यञ्जकः 7xy - 5x इत्यस्य पदद्वयम् 7xy एवं 5x स्तः।7xy पदं 7, x तथा y गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति। कस्यापि पदस्य संख्यात्मकः गुणनखण्डः तस्य संख्यात्मकः गुणाङ्कः अथवा गुणाङ्कः उच्यते। 7xy पदस्य गुणाङ्कः 7 अस्ति तथा - 5x इति पदस्य गुणाङ्कः -5 अस्ति।

9.3 पदी द्विपदं बहुपदञ्च

यस्मिन् व्यञ्जके केवलम् एकं पदं भवति तत् एकपदी इति उच्यते। पदद्वयव्यञ्जकः द्विपदम् इति उच्यते। पदत्रयाणां व्यञ्जकः त्रिपदी इति उच्यते तथा एवमेव अन्यद् अपि। व्यापकतः एकम् अथवा अधिकपदीय व्यञ्जकः यस्य गुणाङ्कः शून्येतरः भवेत् तथा यस्य चराणां घातः ऋणेतरः भवेत् तत् बहुपदं भवति। बहुपदस्य पदानां संख्या एका अथवा एकतः अधिका काचिद् अपि भवितुम् अर्हति।

एकपदस्य उदाहरणम् : $4x^2$, 3xy, -7z, $5xy^2$, 10y, -9, 82mnp इत्यादिः।

द्विपदस्य उदाहरणम् : a+b, 4l+5m, a+4, 5-3xy, $z^2 - 4y^2$ इत्यादिः।

त्रिपदस्य उदाहरणम् : a+b+c, 2x+3y-5, $x^2y - xy^2 + y^2$ इत्यादिः।

बहुपदस्य उदाहरणम् : a+b+c+d, 3xy, 7xyz-10, 2x+3y+7z इत्यादिः।

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखितबहुपदानां एकपदे द्विपदे त्रिपदे च वर्गीकरणं कुर्वन्तु।
   -z + 5, x + y + z, y + z + 100, ab - ac, 17
2. निर्मान्तु -
   (a) त्रयम् एतादृशं द्विपदं यस्मिन् केवलम् एकः चरः x भवेत्।
   (b) त्रयम् एतादृशं द्विपदं यस्मिन् x तथा y भवेताम्।
   (c) त्रयम् एकपदं यस्मिन् x तथा y भवेताम्।
   (d) चत्वारि अथवा अधिकपदयुक्तं 2 बहुपदम्।

9.4 समानम् असमानञ्च पदम्

निम्नलिखितव्यञ्जकान् पश्यन्तु।

7x,14x,-13x, $5x^2$, 7y, 7xy, $-9y^2$, $-9x^2$, -5yx

एतेषु समानपदम् इत्थम् अस्ति ।

(i) 7x , 14x तथा-13x (ii) $5x^2$ तथा- $9x^2$

(iii) 7xy एवं-5yx

7x एवं 7y समानंपदंकथंनस्तः?

7x एवं 7xy समानंपदंकथंनस्तः?

7x एवं $5x^2$ समानंपदंकथंनस्तः?

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितेषु प्रत्येकं द्वे समानपदे लेखनीये -

(i) 7xy (ii) $4mn^2$ (iii) 2l

9.5 बीजीयव्यञ्जकानां योगः व्यवकलनञ्च

गतकक्ष्यासु वयम् एतत् अपि शिक्षितवन्तः यत् बीजीयव्यञ्जकानां योगः अथ व्यवकलनं कथं भवेत् उदाहरणार्थं $7x^2-4x+5$ एवं 9x-10 इति योगार्थं वयम् एवं रीत्या कुर्मः ।

$$7x^2-4x+5$$

$$+ \quad 9x-10$$

$$7x^2+5x-5$$

विचारयन्तु यत् वयं योगफलं कथं जानीमः । योज्यमानान् प्रत्येकं व्यञ्जनान् वयं विभिन्नपङ्क्तौ लिखामः । एतस्मिन् समये वयं समानपदानि परस्परम् अधोपरि लिखामः तथा यथा ऊपरि दर्शितम् अस्ति वयं तानि समानपदानि योजयामः । अतः 5 + (-10)= 5 - 10 = -5 एवमेव -4x + 9x = (-4 + 9)x= 5x, आगच्छन्तु केषाञ्चन उदाहरणानां समाधानं कुर्मः ।

उदाहरणम् 1 : 7xy + 5yz - 3zx, 4yz + 9xz - 4y, -3xz + 5x - 2xy इत्यस्य योगं जानीमः ।

समाधानम् : समानपदानि परस्परम् अधोपरि संस्थाप्य त्रीन् व्यञ्जकान् विभिन्नपङ्क्तिषु विलिखन्तः वयं प्राप्नुमः ।

$$7xy + 5yz - 3zx$$

$$+ \quad 4yz + 9zx \quad - 4y$$

$$+ \ -2xy \quad -3zx + 5x$$

$$5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$$

(ध्यानं ददतु xz तथा zx समाने एव स्तः)

इत्थं व्यञ्जकानां योगः 5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y अस्ति ।ध्यानं ददतु द्वितीयव्यञ्जकस्य पदं -4 तथा तृतीयव्यञ्जकस्य पदं 5 इत्यस्य योगफले तथैव लिखितम् अस्ति यथा ते सन्ति यतो हि अपरव्यञ्जकेषु तेषां स्थानम् एव नास्ति ।

उदाहरणम् 2 : $7x^2-4xy+8y^2+5x-3y$ इत्यस्मिन् $5x^2- 4y^2+6y-3$ इति व्यवकलयन्तु ।

समाधानम् : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$

$$5x^2 \quad -4y^2 \quad +6y-3$$

$$(-) \quad (+) \quad (-) \quad (+)$$

$$2x^2-4xy+12y^2+5x-9y+3$$

सूचना - कस्याः अपि संख्यायाः व्यवकलनं यस्य योज्यप्रतिलोमं योगस्य समानम् अस्ति। एवं रीत्या -3 इति व्यवकलनं +3 इति योगस्य समानम् अस्ति एवमेव-6y इति व्यवकलनं -6y इति योगस्य समानम् अस्ति। $-4y^2$ इति व्यवकलनं $4y^2$ इति योगस्य समानम् अस्ति तथा एवमेव अन्यस्याः द्वितीयपङ्क्तेः प्रत्येकं पदस्य नीचैः तृतीयपङ्क्तौ टङ्कितचिह्नेन एतत् ज्ञातुं साहाय्यं मिलति यत् का सङ्क्रिया भवति।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखितव्यञ्जकेषु प्रत्येकं पदानि गुणाङ्कान् च परिचिन्वन्तु -

   (i) $5xyz^2-3zy$ (ii) $1+x+x^2$ (iii) $4x^2y^2-4x^2y^2z^2+z^2$

   (iv) $3-pq+qr-rp$ (v) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-xy$ (vi) $0.3a-0.6ab+0.5b$

2. निम्नलिखित-बहुपदं एकपदे द्विपदे त्रिपदे वर्गीकरणं कुर्वन्तु। कतमं बहुपदं एतेषु त्रिषु श्रेणिषु केषुचित् अपि नास्ति ?

   $x+y, 1000, x+x^2+x^3+x^4, 7+y+5x, 2y-3y^2, 2y-3y^2+4y^3, 5x-4y+3xy, 4z-15z^2, ab+bc+c-d+da, pqr, p^2q+pq^2, 2p+2q$

3. निम्नलिखितानां योगं जानन्तु।

   (i) $ab-bc, bc-ca, ca-ab$ (ii) $a-b+ab, b-c+bc, c-a+ac$

   (iii) $2p^2q^2-3pq+4, 5+7pq-3p^2q^2$ (iv) $l^2+m^2, m^2+n^2, n^2+l^2, 2lm+2mm+2nl$

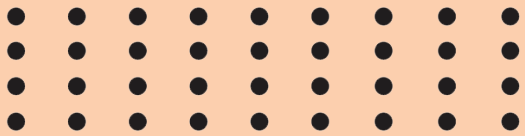
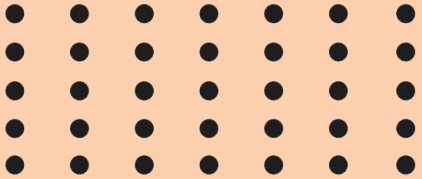
4. (a) $12a-9ab+5b-3$ इत्यस्मिन् $4a-7ab+3b+12$ इतिव्यवकलयन्तु।

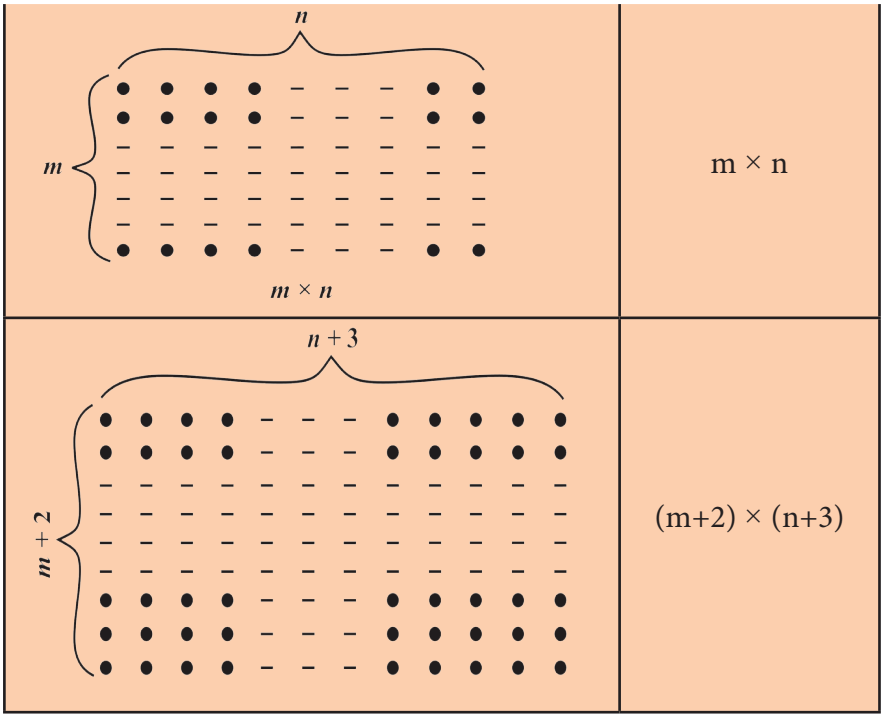
   (b) $5xy-2yz-2zx+10xyz$ इत्यस्मिन् $3xy+5yz-7zx$ इतिव्यवकलयन्तु।

   (c) $18-3p-11q+5pq-2pq^2+5p^2q$ इत्यस्मिन् $4p^2q-3pq+5pq^2-8p+7q-10$ इतिव्यवकलयन्तु।

9.6 बीजीय व्यञ्जकानां गुणनम्

(i) बिन्दूनां निम्नलिखितप्रतिरूपं पश्यन्तु -

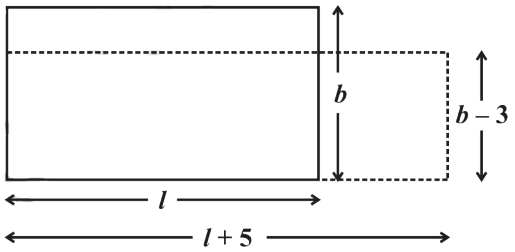
बिन्दूनां प्रतिरूपम्	बिन्दूनां सम्पूर्णा संख्या
	4×9
	5×7



बिन्दूनां संख्यां ज्ञातुं वयं पङ्क्तीनां संख्यायाः व्यञ्जकान् स्तम्भानां संख्यायाः व्यञ्जकैः सह गुणनं कुर्मः ।

अत्र पङ्क्तीनां संख्या 2 इति वर्धिता अस्ति अर्थात् m +2 तथा स्तम्भानां संख्या 3 इति वर्धिता अस्ति n +3 ।

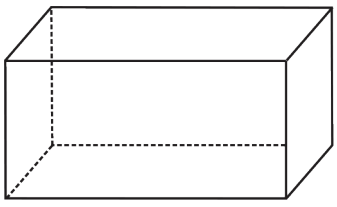
(i) किं भवन्तः इतोपि ईदृक्परिस्थितीनां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति यस्मिन् बीजीयद्वयव्यञ्जकानां गुणनं कर्तुं भवेत्? अमीना उत्थाय वदति । वयम् आयतस्य क्षेत्रफलविषये विचारयितुं शक्नुमः । आयतस्य क्षेत्रफलं l × b अस्तियस्मिन् l औन्नत्यम् अस्ति तथा b वैशाल्यम् अस्ति यदि आयतस्य औन्नत्यं 5 एककः वर्धितः भवेत् अर्थात् (l + 5) एवं भवेत् तथा वैशाल्यं 3 एककः न्यूनः भवेत् अर्थात् (b - 3) एवं भवेत् तदा आयतस्य क्षेत्रफलं (l + 5) × (b - 3) इति भविष्यति ।



आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं l × b अथवा (l + 5) × (b - 3) इति रूपस्य बीजीय व्यञ्जकानां गुणनं कुर्मः ।

(ii) किं भवन्तः आयतनस्य विषये विचारयितुं समर्थाः सन्ति ? (एकस्य आयताकारस्य मञ्जूषायाः आयतनं तस्य लम्बस्य वैशाल्यस्य अथ औन्नतस्य गुणनफलेन प्राप्यते ।)

(iv) सरिता कथयति यत् यदा वयं कमपि वस्तु क्रीणामः तदा वयं गुणनं कुर्मः । उदाहरणार्थं यदि प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं p रुप्यकम् अस्ति तथा विद्यालयीय विहाराय z इति द्वादशकदलीफलानाम् आवश्यकता अस्ति तर्हि वयं (p × z) रुप्यकं देयं भविष्यति ।



स्वीकुर्वन्तु प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं 2 रुप्यकं न्यूनम् अस्ति तथा विहाराय 12 कदलीफलानां चतुर्गुणं न्यूनम् आवश्यकता भविष्यति चेत् प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं (p - 2) रुप्यकम् अभविष्यत् तथा (z - 4) इति द्वादशात्मककदलीफलानाम् आवश्यकता अभविष्यत् । अत एव अस्माभिः (p - 2) × (z - 4) रुप्यकं देयं भवति ।

प्रयासं करोतु

किं भवन्तः ईदृक्परिस्थितीनां विषये विचारयितुं शक्नुमः यत्र वयं बीजीयव्यञ्जकानां गुणनं कर्तुं भविष्यति ?

सूचना • चालनं तथा समयस्य विषये विचारयन्तु।

• साधारणं कुसीदः, मूलधनं तथा साधारणकुशीदस्य परिमाणादिकस्य विषये चिन्तयन्तु।

उपर्युक्तेषु सर्वेषु उदाहरणेषु वयं राशिद्वयानाम् अथवा ततोपि अधिकानां राशीनां गुणनं कृतवन्तः। यदि राशयः बीजीयव्यञ्जकरूपे सन्ति तथा वयं तेषां गुणनफलं ज्ञातुम् इच्छामः तर्हि अस्य अयम् अर्थः यत् अस्माभिः एतत् ज्ञातव्यं यत् एतत् गुणनफलं कथं प्राप्यते। आगच्छन्तु एतत् क्रमेण कुर्मः। सर्वप्रथमं वयम् द्वयोः एकपदयोः गुणनं कुर्मः।

9.7 एकपदीयानां एकपदीयैः सह गुणनम्

9.7.1 द्वयोः एकपदयोः गुणनम्

वयं प्रारम्भं कुर्मः

$4 \times x = x+x+x+x = 4x$ इति यत् वयं पूर्वं शिक्षितवन्तः।

एवमेव $4 \times (3x) = 3x+3x+3x+3x = 12x$

अधुना निम्नलिखितगुणनफलानां विषये विचारं कुर्वन्तु -

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ध्यानं ददतु एकपदीयानां त्रयमपि गुणनफलं 3xy,15xy,-15xy अपि एकपदी एव अस्ति।

किञ्चित् इतोपि उपयुक्त-उदाहरणं निम्नम् अस्ति -

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

लिखन्तु $5 \times 4 = 20$ अर्थात् गुणनफलस्य गुणाङ्कः = प्रथमम् एकपद्याः गुणाङ्कः × द्वितीय एकपद्याः गुणाङ्कः तथा

$x \times x^2 = x^3$

अर्थात् गुणनफलस्य बीजीय गुणनखण्डः = प्रथमम् एकपद्याः बीजीयगुणनखण्डः × द्वितीय एकपद्याः बीजीयगुणनखण्डः।

ध्यानं ददतु यत् वयं द्वयोः एकपदयोः बीजीयभागानां विभिन्नचराणां घातान् कथम् एकत्रितं कुर्मः। एवं करणाय वयं घातीय नियमानाम् उपयोगं कुर्मः।

9.7.2 तिसृणाम् अथवा अधिकानाम् एकपदीनां गुणनम्

निम्नलिखित-उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120 (x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

एतत् स्पष्टम् अस्ति यत् वयं सर्वप्रथमं द्वयोः एकपद्योः गुणनं कुर्मः तथा इत्थं गुणनफलरूपे प्राप्ताम् एकपदीं तृतीय एकपद्या सह गुणनं कुर्मः। बहुसंख्य-एकपदीयानां गुणनं करणार्थं अस्य विधेः विस्तारं कर्तुं शक्नुमः।

प्रयासं करोतु

$4x \times 5y \times 7z$ जानन्तु सर्वप्रथमं $4x \times 5y$ जानन्तु तथा तस्य $7z$ इत्यनेन साकं गुणाकारं कुर्वन्तु अथवा सर्वप्रथमं $5y \times 7z$ जानन्तु तथा तस्य $4x$ इत्यनेन साकं गुणाकारं कुर्वन्तु किं परिणामः समानः एव अस्ति ? भवन्तः किं विचारयन्ति ? किं गुणाकारसमये क्रमस्य महत्त्वम् अस्ति ?

वयम् अपरेण विधिना अपि एतत् गुणनफलं ज्ञातुं शक्नुमः - $4xy \times 5x^2 y^2 \times 6x^3 y^3 = (4 \times 5 \times \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120x^6 y^6$

उदाहरणम् 3 एकस्य आयतस्य यस्य औन्नत्यं वैशाल्यञ्च दत्तम् अस्ति क्षेत्रफलस्य सारणीं पूरयन्तु।

समाधानम्

औन्नत्यम्	वैशाल्यम्	क्षेत्रफलम्
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	.....
$4ab$	$5bc$	.....
$2l^2 m$	$3lm^2$	.....

उदाहरणम् 4 निम्नलिखितसारण्यां तिसृणां मञ्जूषाणाम् आयताकारस्य लम्बं वैशाल्यम् अथ औन्नत्यं प्रदत्तम् अस्ति। प्रत्येकम् आयतनं जानन्तु।

	लम्बम्	वैशाल्यम्	औन्नत्यम्
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	$m^2 n$	$n^2 p$	$p^2 m$
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

समाधानम् आयतनम् = लम्बं × वैशाल्यम् × औन्नत्यम्

अतः (i) आयतनम् $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$

$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) आयतनम् $= m^2 n \times n^2 p \times p^2 m$

$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3 n^3 p^3$

(iii) आयतनम् $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$

$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्नलिखित-एकपदीयुग्मानां गुणनफलं जानन्तु -

(i) $4, 7q$ (ii) $-4p, 7q$ (iii) $-4q, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$

(v) $4p, 0$

2. निम्नलिखित-एकपदी-युग्मानां रूपे औन्नत्य-वैशाल्ययुक्तानाम् आयतानां क्षेत्रफलं जानन्तु।

$(p,q); (10m,5n); (20x^2,5y^2); (4x,3x^2); (3mn,4np)$

3. गुणनफलानां सारणीं पूरयन्तु।

प्रथम-एकपद → / द्वितीय-एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	……	……	……	……	……
$-5y$	……	……	$-15x^2y$	……	……	……
$3x^2$	……	……	……	……	……	……
$-4xy$	……	……	……	……	……	……
$7x^2y$	……	……	……	……	……	……
$-9x^2y^2$	……	……	……	……	……	……

4. ईदृशाम् आयताकारमञ्जूषाणाम् आयतनं जानन्तु येषां लम्बं , वैशाल्यम् , औन्नत्यञ्च क्रमशः निम्नलिखितं वर्त्तते।

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. निम्नलिखितानां गुणनफलं जानन्तु।

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 एकपदीनां बहुपदैः सह गुणनम्

9.8.1 एकपदीनां द्विपदैः सह गुणनम्

आगच्छन्तु एकपदी $3x$ इति द्विपदेन $5y+2$ इत्यनेन गुणनं कुर्मः अर्थात् $3x \times (5y+2)$ जानीमः। स्मरन्तु यत् $3x$ तथा $(5y+2)$ संख्यां निरूपयति। अत एव विवरणस्य नियमानाम् उपयोगं कुर्वन्

$3x \times (5y+2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

वयं सामान्यतः स्व परिकलनेषु वितरणनियमस्य उपयोगं कुर्मः। उदाहरणार्थम्

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (अत्र वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कृतवन्तः)

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (अत्र वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कृतवन्तः)

$= 280 - 14 = 266$

एवमेव $(-3x) \times (-5y+2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

तथा $5xy \times (y^2+3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$.

द्विपदस्य एकपद्याः च गुणनफलविषये भवन्तः किं विचारयन्ति ? उदाहरणार्थं $(5y+2) \times 3x = ?$

वयं $7 \times 3 = 3 \times 7$; अथवा व्यापकरूपेण $a \times b = b \times a$ इति रूपे क्रमविनिमेयनियमस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः।

एवमेव $(5y+2) \times 3x = 3x \times (5y+2) = 15xy + 6x$ अस्ति।

प्रयासं करोतु

गुणनफलं जानन्तु (i) $2x(3x+5xy)$ (ii) $a^2(2ab-5c)$

9.8.2 एकपदीनां त्रिपदैः सह गुणनम्

$3p \times (4p^2+5p+7)$ गृह्णन्तु। पूर्वमिव वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः।

$$3p\times(4p^2+5p+7)=(3p\times4p^2)+(3p\times5p)+(3p\times7)$$
$$=12p^3+15p^2+21p$$

त्रिपदस्य प्रत्येकं पदम् एकपद्या सह गुणनं कुर्वन्तु तथा गुणनफलं योजयन्तु।

प्रयासं करोतु

$(4p^2+5p+7)\times3p$ इत्यस्य गुणनफलं जानन्तु।

विचारयन्तु वितरणनियमस्य उपयोगेन वयम् एकपदस्य एकपदेन साकं गुणनं कर्तुं सक्षमाः स्मः।

उदाहरणम् 5 व्यञ्जकान् सरली कुर्वन्तु तथा निर्देशानुसारं मानं जानन्तु।

$x(x-3)+2$, $x=1$ इत्यस्य कृते (ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63$, $y=-2$ इत्यस्य कृते

समाधानम्

(i) $x(x-3)+2=x^2-3x+2$

$x=1$ इत्यस्य कृते $x^2-3x+2=(1)^2-3(1)+2$

$=1-3+2=3-3=0$

(ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63=6y^2-21y-3y+12-63$

$=6y^2-24y-51$

$y=-2$ इत्यस्य कृते, $6y^2-24y-51=6(-2)^2-24(-2)-51$

$=6\times4+24\times2-51$

$=24+48-51=72-51=21$

उदाहरणम् 6 योजयन्तु -

(i) $5m(3-m)$ तथा $6m^2-13m$ (ii) $4y(3y^2+5y-7)$ तथा $2(y^3-4y^2+5)$

समाधानम्

(i) प्रथमः व्यञ्जकः $5m(3-m)=(5m\times3)-(5m\times m)=15m-5m^2$

अधुना द्वितीयव्यञ्जकं योजने सति $15m-5m^2+6m^2-13m=m^2+2m$

(ii) प्रथमः व्यञ्जकः $=4y(3y^2+5y-7)=(4y\times3y^2)+(4y\times5y)+(4y\times(-7))$

$=12y^3+20y^2-28y$

द्वितीयव्यञ्जकः $=2(y^3-4y^2+5)=2y^3+2\times(-4y^2)+2\times5$

$=2y^3-8y^2+10$

उभयोः व्यञ्जकयोः योजने सति $12y^3 + 20y^2-28y$

$+ \quad 2y^3 - 8y^2 + 10$

$14y^3 + 12y^2-28y + 10$

उदाहरणम् 7 : $2pq\,(p+q)$ इत्यस्मिन् $3pq\,(p-q)$ इतिव्यवकलयन्तु।

समाधानम् वयं प्राप्नुमः $3pq\,(p-q)=3p^2q-3pq^2$ तथा

$2pq\,(p+q)=2p^2q-2pq^2$

व्यवकलने सति

	$2p^2q$	+	$2pq^2$
	$3p^2q$	-	$3pq^2$
-		+	
	$-p^2q$	+	$5pq^2$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्नलिखितयुग्मेषु प्रत्येकं व्यञ्जकानां गुणनं कुर्वन्तु।

4p,q+r (ii) ab,a-b (iii) a+b ,$7a^2$ b^2 (iv) a^2-9,4a (v) pq+qr+rp ,0

2. सारणीं पूरयन्तु

	प्रथमव्यञ्जकः	द्वितीयव्यञ्जकः	गुणनफलम्
(i)	a	b+c+d	-------
(ii)	x+y-5	5xy	-------
(iii)	p	$6p^2$-7p+5	-------
(iv)	$4p^2$ q^2	p^2-q^2	-------
(v)	a+b+c	abc	-------

3. गुणनफलं जानन्तु

(i) $(a^2)\times(2a^{22})\times(4a^{26})$

(ii) $\left(\frac{2}{3}\ xy\right)\times\left(\frac{-9}{10}\ x^2\ y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}\ pq^3\right)\times\left(\frac{6}{5}p^3\ q\right)$

(iv) $x\times x^2\times x^3\times x^4$

4. (a) $3x\,(4x-5)+3$ इति सरलीकुर्वन्तु तथा (i) $x=3$ एवं (ii) $x=\frac{1}{2}$ इत्यस्य कृते अस्य मानं जानन्तु।

(b) $a\,(a^2+a+1)+5$ इति सरलीकुर्वन्तु तथा (i) $a=0$, (ii) $a=1$ एवं (iii) $a=-1$ इत्यस्य कृते अस्य मानं जानन्तु।

5. (a) $p\,(p-q)$,$q\,(q-r)$ एवं $r\,(r-p)$ इति योजयन्तु।

(b) $2x\,(z-x-y)$ एवं $2y\,(z-y-x)$ इति योजयन्तु।

(c) $4l\,(10n-3m+2l)$ इत्यस्मिन् $3l\,(l-4m+5n)$ इति व्यवकलयन्तु।

(d) $4c\,(-a+b+c)$ इत्यस्मिन् $3a\,(a+b+c)$-$2b\,(a-b+c)$ इति व्यवकलयन्तु।

9.9 बहुपदं बहुपदेन साकं गुणनम्

9.9.1 द्विपदं द्विपदेन साकं गुणनम्

आगच्छन्तु एकं द्विपदं (2a+3b) इति अपरेण द्विपदेन (3a+4b) इत्यनेन साकं गुणनं कुर्मः। यथा वयं पूर्वम् अपि कृतवन्तः तथैव गुणनस्य वितरणनियमानुसरणं कुर्वन्तः वयम् एतम् अपि क्रमेण कुर्मः।

$$(3a+4b)\times(2a+3b)=3a\times(2a+3b)+4b\times(2a+3b)$$

ध्यानं ददतु एकद्विपदस्य प्रत्येकं पदम् अपरद्विपदस्य प्रत्येकं पदेन सह गुणनं भवति।

$= (3a\times2a)+(3a\times3b)+(4b\times2a)+(4b\times3b)$

$= 6a^2+9ab+8ba+12b^2$

$= 6a^2+17ab+12b^2$ (यतो हि ba=ab अस्ति)

यदा वयम् एकस्य पदस्य एकेन पदेन साकं गुणनं कुर्मः तदा वयम् आशां कुर्मः यत् 2×2=4 इति पदम् उपस्थितं भवेत् परन्तु एतेषु पदद्वयं समानम् अस्ति यत् पदम् एकत्रितं कृतवन्तः तथा एवमेव वयं 3 पदं प्राप्तं कुर्मः।

बहुपदं बहुपदेन साकं गुणनसमये अस्माभिः समानपदम् अन्वेषितव्यं तथा तस्य मेलनम् अपि कर्त्तव्यम्।

उदाहरणम् 8 गुणनं कुर्वन्तु

(i) (x-4) एवं (2x+3) इति (ii) (x-y) एवं (3x+5y) इति

समाधानम्

(i) $(x-4)\times(2x+3) = x\times(2x+3)-4\times(2x+3)$

$= (x\times2x)+(x\times3)-(4\times2x)-(4\times3)=2x^2+3x-8x-12$

$= 2x^2-5x-12$ (समानपदानां योजने सति)

(ii) $(x-y)\times(3x+5y)=x\times(3x+5y)-y\times(3x+5y)$

$= (x\times3x)+(x\times5y)-(y\times3x)-(y\times5y)$

$= 3x^2+5xy-3xy-5y^2=3x^2+2xy-5y^2$ (समानपदानां योजने सति)

उदाहरणम् 9 गुणनं कुर्वन्तु

(i) (a+7) एवं (b-5) इति (ii) (a^2+2b^2) एवं (5a-3b) इति

समाधानम्

(i) $(a+7)\times(b-5)=a\times(b-5)+7\times(b-5)$

$= ab-5a+7b-35$

लिखन्तु यत् अस्मिन् गुणने कमपि समानं पदं नास्ति।

(ii) $(a^2+2b^2)\times(5a-3b) = a^2(5a-3b)+2b^2\times(5a-3b)$

$= 5a^3-3a^2b+10ab^2-6b^3$

9.9.2 द्विपदस्य त्रिपदेन साकं गुणनम्

अस्मिन् गुणने वयं त्रिपदस्य प्रत्येकं पदं द्विपदस्य प्रत्येकेन पदेन सह गुणनं कुर्मः। एवं रीत्या वयं पदं 3×2 = 6 प्राप्स्यामः यदि एकं पदम्एकपदेन साकं गुणनं करणे सति समानपदं भवति तर्हि प्राप्तपदानां संख्या न्यूनीभूय पञ्च अथवा तस्मात् अपि न्यूनं भवितुम् अर्हति।

$\underbrace{(a+7)}_{\text{द्विपदं}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{त्रिपदं}} = a\times(a^2+3a+5)+7\times(a^2+3a+5)$ वितरणनियमस्य उपयोगेन

$= a^3+3a^2+5a+7a^2+21a+35$

$= a^3 (3a^2+7a^2)+(5a+21a)+35$

$= a^3+10a^2+26a+35$ (अन्तिमपरिणामे केवलं चत्वारि पदानि एव कथं सन्ति ?)

उदाहरणम् 10 सरलीकुर्वन्तु (a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b) c

समाधानम् वयं प्राप्नुमः

$(a+b)(2a-3b+c) = a(2a-3b+c)+b(2a-3b+c)$

$= 2a^2-3ab+ac+2ab-3b^2+bc$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac$

(ध्यानं ददतु -3ab एवं 2ab समानं पदम् अस्ति ।)

तथा $(2a-3b)c=2ac-3bc$ अस्ति ।

अत एव $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c = 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-(2ac-3bc)$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-2ac+3bc)$

$= 2a^2-ab-3b^2+(bc+3bc)+(ac-2ac)$

$= 2a^2-3b^2-ab+4bc-ac$

प्रश्नावली 9.4

1. द्विपदानां गुणनं कुर्वन्तु

(i) (2x+5) तथा (4x-3)

(ii) (y-8) तथा (3y-4)

(iii) (2.5l+0.5m) तथा (2.5l+0.5m)

(iv) (a+3b) तथा (x+5)

(v) $(2pq+3q^2)$ तथा $(3pq-2q^2)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2\right)$ तथा $4\left(a^2-\frac{2}{3}b^2\right)$

2. गुणनफलं जानन्तु ।

(i) (5-2x) (3+x)

(ii) (x+7y)(7x-y)

(iii) $(a^2+b)(a+b^2)$

(iv) $(p^2-q^2)(2p+q)$

3. सरलं कुर्वन्तु

(i) $(x^2-5)(x+5)+25$

(ii) $(a^2+5)(b^3+3)+5$

(iii) $(t+s^2)(t^2-s)$

(iv) (a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)+2 (ac+bd)

(v) (x+y)(2x+y)+(x+2y)(x-y)

(vi) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(vii) (1.5x-4y)(1.5x+4y+3)-4.5x+12y

(viii) (a+b+c)(a+b-c)

9.10 सर्वसमिका का अस्ति ?

समिका $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$ इति गृह्णन्तु। a इत्यस्य मानं a=10 इत्यस्य कृते वयम् अस्याः समिकायाः उभयोः पक्षयोः मानं जानन्तु।

a=10 इत्यस्य कृतेवामपक्षः $=(a+1)(a+2)=(10+1)(10+2)=11\times12=132$

दक्षपक्षः $=a^2+3a+2== 10^2+3\times10+2=100+30+2=132$

अतः a=10 इत्यस्य कृते समिकायाः उभयः पक्षः समानः अस्ति।

आगच्छन्तु अधुना a=-5 गृह्णामः।

वामपक्षः $= (a+1)(a+2)=(-5+1)(-5+2)=(-4)\times(-3)=12$

दक्षपक्षः $= a^2+3a+2=(-5)^2+3(-5)+2$

$= 25-15+2=10+2=12$

अतः a=-5 इत्यस्य कृतेअपि वामपक्षः = दक्षपक्षः अस्ति।

इत्थं वयं प्राप्नुमः यत् a इत्यस्य कस्य अपि मानस्य कृते अस्याः समिकायाः वामपक्षः =दक्षपक्षः अस्ति। ईदृशी समिका या चरस्य सर्वेषां मानानां कृते सत्यं भवति सा सर्वसमिका उच्यते।

इत्थं $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$ एका सर्वसमिका अस्ति।

एकं समीकरणं स्व चरस्य केवलं किञ्चित् निश्चितमानानां कृते एव सत्यं भवति, एतत् चरस्य सर्वेषां मानानां कृते सत्यं न भवति। उदाहरणार्थं समीकरणं $a^2+3a+2=132$ इत्यस्य चर्चां कुर्वन्तु। एतत् समीकरणं a=10 इत्यस्य कृते सत्यम् अस्ति यथा वयम् उपर्युक्तपङ्क्तिषु अपश्याम परन्तु a=-5 अथवा a=0 इत्यादीनां कृते एतत् सत्यं नास्ति। दर्शयन्तु यत् $a^2+3a+2=132$, a=-5 अथवा a=0 इत्यादीनां कृते एतत् सत्यं नास्ति।

9.11 मानकसर्वसमिका:

अधुना वयम् एतादृशीनां तिसृणां सर्वसमिकानां विषये अध्ययनं कुर्मः या बहु उपयोगीनि अस्ति। एकं द्विपदम् अपरेण द्विपदेन सह गुणनं कुर्वन्तः एतां सर्वसमिकां प्राप्नुमः।

सर्वप्रथमं वयं गुणनफलम् $(a+b)(a+b)$अथवा $(a+b)^2$ इत्यस्य विषये चर्चां कुर्मः।

$$(a+b)^2= (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b)+b\,(a+b)$$
$$= a^2+ab+ba+b^2$$
$$= a^2+2ab+b^2 \qquad \text{(यतो हि } ab=ba\text{)}$$

अतः $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

स्पष्टतः एतत् एका सर्वसामिका अस्ति यतो हि वास्तविकगुणनद्वारा वामपक्षतः दक्षपक्षस्य प्राप्तिः अभवत्। भवन्तः सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् a तथा b इत्यस्य कस्यापि मानस्य कृते सर्वसमिकायाः उभयोः पक्षयोः मानं समानम् अस्ति।

- अस्मात् पश्चात् वयं गुणनफलं $(a-b)(a-b)$ अथवा $(a-b)^2$ इत्यस्य विषये चर्चां कुर्मः।

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)=a\,(a-b)-b\,(a-b)$$
$$= a^2-ab-ba+b^2= a^2-2ab+b^2$$

अथवा $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (II)

• अन्ततः (a+b)(a-b)इत्यस्मिन् विचारं कुर्मः ।

वयं प्राप्तवन्तः (a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)

$= a^2-ab+ba-b^2= a^2-b^2$ (यतो हि ab=ba)

अथवा $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$ (III)

सर्वसमिका (I) (II) तथा (III) मानकसर्वसमिकाः उच्यन्ते ।

प्रयासं करोतु

सर्वसमिका (I) इत्यस्मिन् b इत्यस्य स्थाने -b रक्षतु । किं भवन्तः सर्वसमिकां (II) प्राप्नुवन्ति ?

• अधुना वयम् एका अधिक-उपयोगिसर्वसमिकायाः अध्ययनं कुर्मः ।

$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$

$= x^2+bx+ax+ab$

अथवा $\boxed{(x+a)(x+b)=x2+(a+b)x+ab}$ (IV)

प्रयासं करोतु

1. a=2, b=3, x=5 इत्यस्य कृते सर्वसमिका (IV) इत्यस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।
2. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् a=b ग्रहणे सति भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (I) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?
3. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् a=-c तथा b=-c इति ग्रहणे सति भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (II) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?
4. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् b=-a गृह्णन्तु भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (III) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?

वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् सर्वसमिका (IV) अन्याषां तिसृणां सर्वसमिकानां व्यापकं रूपम् अस्ति ।

9.12 सर्वसमिकानाम् उपयोगः

अधुना वयं द्रक्ष्यामः यत् सर्वसमिकानाम् उपयोगः द्विपदव्यञ्जकानां गुणनं तथा संख्यानां गुणनस्य कृते अपि साधारणं वैकल्पिकविधिं प्रददाति ।

उदाहरणम् 11 सर्वसमिका (I) इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः (i) $(2x+3y)^2$ (ii) 103^2 जानन्तु ।

समाधानम्

$(2x+3y)^2 = (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$ [सर्वसमिका इत्यस्य (I) उपयोगेन]

$= 4x^2+12xy+9y^2$

वयं $(2x+3y)^2$ इत्यस्य मानं साक्षात् ज्ञातुं शक्नुमः ।

$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y)$

$= (2x)(2x)+(2x)(3y)+(3y)(2x)+(3y)(3y)$

$= 4x^2+6xy+6\ yx+9y^2$ (यतोहि xy=yx)

$= 4x^2+12xy+9y^2$ (यतोहि xy=yx)

सर्वसमिका (I) इत्यस्य उपयोगेन वयं (2x+3y) इत्यस्य वर्गीकरणस्य वैकल्पिकविधिं प्राप्नुमः ।

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् उपर्युक्तसाक्षात् विधेः अपेक्षया सर्वसमिकाविधेः चरणानां संख्या न्यूना अस्ति ? भवन्तः अस्याः विधेः सरलतां तदा अनुभविष्यन्ति यदा भवन्तः (2x+3y) इत्यस्य अपेक्षया अधिकानां जटिलानां द्विपदव्यञ्जकानां वर्गीकरणस्य प्रयत्नं करिष्यन्ति ।

(ii) $(103)^2 = (100+3)^2$

$= 100^2+2\times100\times3+3^2$

$= 10000+600+9=10609$

वयं 103 इति 103 इत्यनेन साक्षात् गुणनं कृत्वा वाञ्छित-उत्तरं प्राप्तुं शक्नुमः । किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् 103 इत्यस्य साक्षात् विधेः वर्गीकरणस्य अपेक्षया सर्वसमिका (I) अस्मभ्यं सरलविधिं प्रदत्तवती ? 1013 इत्यस्य वर्गीकरणस्य प्रयत्नं कुर्वन्तु । भवन्तः अस्यां स्थितौ अपि साक्षात् गुणनविधेःअपेक्षया सर्वसमिकानाम् उपयोगविधिम् अधिकं सरलं प्राप्स्यन्ति ।

उदाहरणम् 12 सर्वसमिका (II) इत्यस्य उपयोगेन (i) $(4p-3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ जानन्तु ।

समाधानम्

(i) $(4p-3q)^2 = (4p)^2-2(4p)(3q)+(3q)^2$ [सर्वसमिका (II) इत्यस्य उपयोगेन]

$= 16p^2-24pq+9q^2$

किं भवन्तः सम्मताः सन्ति यत् $(4p-3q)^2$ इत्यस्य वर्गीकरणार्थं साक्षात् विधेः अपेक्षायां सर्वसमिकानां विधिः अधिकः असमीचीनः वर्त्तते ?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0-0.1)^2 = (5.0)^2-2(5.0)(0.1)+(0.1)^2$

$= 25.00-1.00+0.01=24.01$

किं 4.9 इत्यस्य वर्गीकरणं साक्षात् गुणनविधेः अपेक्षायां सर्वसमिकायाः (II) सहायतया सरलं नास्ति ?

उदाहरणम् 13 सर्वसमिका (III) इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः,

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)$ (ii) 983^2-17^2 (iii) 194×206 इति जानन्तु ।

समाधानम्

(ii) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2-\left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2-\frac{4}{9}n^2$

$983^2-17^2=(983+17)(983-17)$

[अत्र a=983,b-17, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

अत एव $983^2-17^2=1000\times966=966000$

$194\times206=(200-6)\times(200+6) = 200^2-6^2$

$= 40000-36=39964$

एतम् ऋजुं कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु भवन्तः अनुभविष्यन्ति यत् अस्माकं सर्वसमिकायाः उपयोगविधिः अतीवसरलः अस्ति ।

उदाहरणम् 14 निम्नलिखितान् ज्ञातुं $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) 501×502 (ii) 95×103

समाधानम्

(i) $501\times502 = (500+1)\times(500+2)=500^2+(1+2)\times500+1\times2$

$= 250000+1500+2=251502$

(ii) $95\times103 = (100-5)\times(100+3) = 100^2+(-5+3)100+(-5)\times3$

$= 10000-200-15=9785$

प्रश्नावली 9.5

1. निम्नलिखित गुणनफलेषु प्रत्येकं प्राप्तुम् उचितसर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2y+5)(2y+5)$ (iii) $(2a-7)(2a-7)$

(iv) $(3a-\frac{1}{2})(3a-\frac{1}{2})$ (v) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)$

(vi) $(a^2+b^2)(-a^2+b^2)$ (vii) $(6x-7)(6x+7)$ (viii) $(-a+c)(-a+c)$

(ix) $\left(x/2+\frac{3y}{4}\right)\left(x/2+\frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a-9b)(7a-9b)$

2. निम्नलिखितगुणनफलं ज्ञातुं $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\ x+ab$ सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) $(x+3)\ (x+7)$ (ii) $(4x+5)\ (4x+1)$

(iii) $(4x-5)\ (4x-1)$ (iv) $(4x+5)\ (4x-1)$

(v) $(2x+5y)\ (2x+3y)$ (vi) $(2a^2+9)\ (2a^2+5)$

(vi) $(xyz-4)\ (xyz-2)$

3. सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितवर्गाणां ज्ञानं कुर्वन्तु।

(i) $(b-7)^2$ (ii) $(xy+3z)^2$ (iii) $(6x^2-5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p-0.5q)^2$ (vi) $(2xy+5y)^2$

4. सरलीकुर्वन्तु

(i) $(a^2-b^2)^2$ (ii) $(2x+5)^2-(2x-5)^2$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2$ (iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$ (vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c$

(vii) $(m^2-n^2\ m)^2+2\ m^3\ n^2$

5. प्रदर्शयन्तु यत् -

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$ (ii) $(9p-5q)^2+180pq=(9p+5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m - \frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq+3q)^2 - (4pq-3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

6. सर्वसमिकानाम् उपयोगेन निम्नलिखितं मानं जानन्तु।

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2 (v) 5.2^2

(vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2 (ix) 1.05×9.5

7. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितानां मानं जानन्तु।

(i) 51^2-49^2 (ii) $(1.02)^2-(9.8)^2$ (iii) 153^2-147^2

(iv) $12.1^2-7.9^2$

8. $(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$ इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितानां मानं जानन्तु।

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. चराणाम् अचराणाञ्च सहायतया व्यञ्जकाः भवन्ति।
2. व्यञ्जकं निर्मातुं पदानां योगः भवति। स्वयमेव पदानां निर्माणं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे भवति।
3. व्यञ्जकः यस्मिन् एकं,द्वे, त्रीणि वा पदानि भवन्ति क्रमशः एकपदी, द्विपदी तथा त्रिपदी नाम्ना ज्ञायते। सामान्यतः एकपदीय अथवा अधिकपदीय व्यञ्जकः यस्मिन् पदानां गुणाङ्कः शून्येतरः अस्ति तथा चराणां घातः ऋणेतरः अस्ति तत् बहुपदम् उच्यते।
4. समान चरैः समानपदं भवति तथा एतेषां चराणां घातः अपि समानः भवति। समानपदानां गुणाः समानाः भवेयुः इति आवश्यकं नास्ति।
5. बहुपदानां योगाय (अथवा व्यवकलनाय) सर्वप्रथमं समानपदम् अन्वेषयन्तु तथा तानि योजयन्तु (अथवा व्यवकलयन्तु) तत् पश्चात् असमानपदानाम् उपयोगं कुर्वन्तु।
6. बहुषु परिस्थितिषु वयं बीजीयव्यञ्जकानां गुणनकरणस्य आवश्यकताम् अनुभवामः। उदाहरणार्थं आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं यस्य भुजाः बीजीयव्यञ्जकरूपे प्रदर्शिताः सन्ति।
7. एकपदीनां एकपद्या सह गुणाकारे सति सर्वदैव एकपदी एव प्राप्यते।
8. बहुपदानां एकपद्या सह गुणनं कर्तुं बहुपदस्य प्रत्येकपदं एकपद्या सह गुणनं क्रियते।
9. बहुपदानां द्विपदेन (अथवा त्रिपदेन) गुणनं कर्तुं वयम् एकं पदं प्रत्येकं पदेन साकं गुणनं कुर्मः अर्थात् बहुपदानां प्रत्येकं पदं द्विपदस्य (अथवा त्रिपदस्य) प्रत्येकपदेन साकं गुणनं भवति। ध्यानं ददतु एतादृशे गुणने वयं गुणनफले समानपदं प्राप्तुं शक्नुमः तथा तेषां योगस्य अपि आवश्यकता भवितुम् अर्हति।
10. सर्वसमिका एका ईदृशी समिका अस्ति या चराणां सर्वेषां मानानां कृते सत्यं भवति यद्यपि समीकरणं चराणां केषाञ्चित् निश्चितमानानां कृते सत्यं भवति। समीकरणं सर्वसमिकाः न सन्ति।

11. निम्नलिखितमानकं सर्वसमिकाः सन्ति -

$(a+b)^2=a^2+2ab+ b^2$ (I)

$(a-b)^2=a^2-2ab+ b^2$ (II)

$(a+b)(a-b)=a^2- b^2$ (III)

12. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ (IV) एका अन्या उपयोगी-सर्वसमिका अस्ति।

13. उपर्युक्तचतस्रः सर्वसमिकाः बीजीयव्यञ्जकानां गुणनफलं ज्ञातुम् एवं वर्गं कर्तुं सहायिकाः सन्ति। एताः सर्वसमिकाः अस्मभ्यं संख्यानां गुणनफलं ज्ञातुं सरलवैकल्पिकविधिं प्रददति।

अध्यायः
10

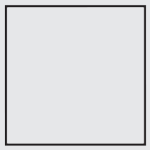
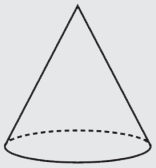
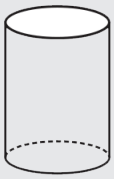
दृढाकाराणां चित्रणम्

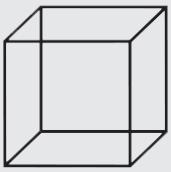
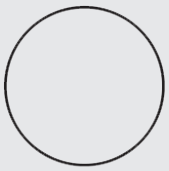
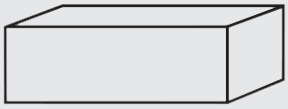
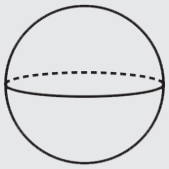
10.1 भूमिका

VII कक्ष्यायां भवन्तः समतलाकाराणां तथा दृढाकाराणां विषये पठितवन्तः । समतलाकाराणां लम्बानाम् औन्नत्यानाञ्च सदृशं मापनद्वयं भवति तथा अत एव एतत् द्विविमीयाकाररूपेण ज्ञायते । यद्यपिदृढाकाराणां लम्बम्, औन्नत्यं, वैशाल्यं अथवा गाम्भीर्यं सदृक् मापत्रयं भवति । अत एव एतेषाम् आकाराणां नाम त्रिविमीय इति । सहैव एकं दृढं वस्तु किञ्चित् स्थानं गृह्णाति । द्विविमीय तथा त्रिविमीय-आकृतीनां क्रमशः 2-D तथा 3-D आकृतिरूपेणापि परिज्ञानं भवति । भवतां स्मरणे भविष्यति यत् त्रिभुजः, आयतः, वृत्तः इत्यादयः 2-D आकृतयः सन्ति यद्यपि घनः, वेलनं, शंकुः, गोलाकारः इत्यादयः 3-D आकृतयः सन्ति ।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितानां मेलनं कुर्वन्तु (भवतां कृते प्रथमं मेलनं कृतम् अस्ति) -

आकारः	आकारस्य प्रकारः	आकारस्य नाम
	त्रिविमीयः	गोलाकारः
	द्विविमीयः	वेलनाकारः
	त्रिविमीयः	वर्गः
	द्विविमीयः	वृत्तः

	त्रिविमीयः	घनाभः
	त्रिविमीयः	घनः
	द्विविमीयः	शंकुः
	त्रिविमीयः	त्रिभुजः

ध्यानं ददतु यत् उपरोक्तेषु सर्वे आकाराः एकाकिनः सन्ति परन्तु अस्माकं व्यावहारिके जीवने अनेकवारं अस्माकं समक्षं विभिन्नाकारेषु संयोजनानि आगच्छन्ति। उदाहरणार्थं निम्नलिखितवस्तुं पश्यन्तु।

एकः वस्त्रमण्डपम्

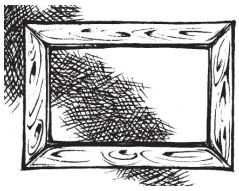
वेलनाकारोपरि एकः शंकुः आरोपितः

एका पेटिका

एकं वेलनाकारकं रिक्तस्थानम्

पयोहिमम्

शंकूपरि अर्धगोलः स्थापितः



एकं चित्रावरणम्

एकः आयताकारः पथः

एकः कटोरम्

एकम् अर्धगोलाकारं रिक्तस्थानम्

स्तम्भोपरि गोलच्छदिः

वेलनाकारोपरि अर्धगोलः आरोपितः

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितचित्राणां वस्तूनाञ्च तेषाम् आकारैः सह मेलनं कुर्वन्तु।

चित्रं (वस्तु)

एकं कृषियोग्यक्षेत्रम्

आकारः

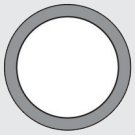
एकायताकार-उद्यानस्य अन्तः द्वौ लम्बायताकार-पन्थानौ

(ii) एकः गहनछिद्रः अथवा नलिका

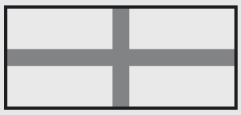
एकवृत्ताकारक्षेत्रस्य अनुदिशं वृत्ताकार-पन्था

(iii) एकं क्रीडनकम्

एकवृत्ताकारक्षेत्रेण सह संलग्नं त्रिभुजाकारक्षेत्रम्

(iv) एकं वृत्ताकार-उद्यानम् 

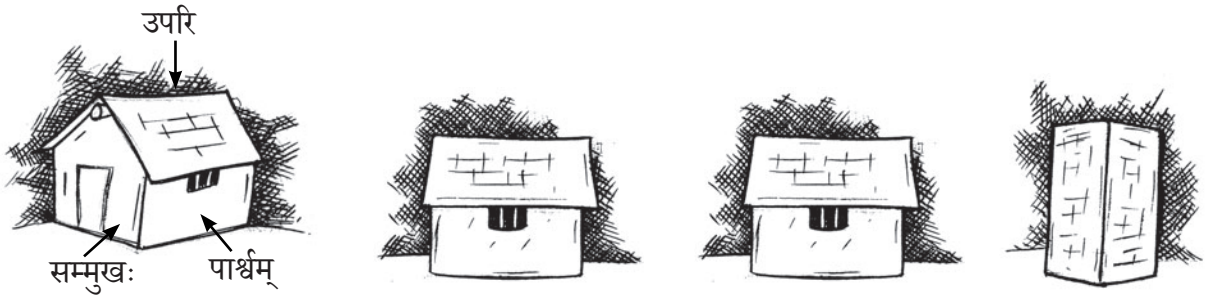
एकस्मात् वेलनात् आकर्ष्य शङ्कोः निष्कासनम्

(v) परस्परं लम्बायमानः पन्था 

एकस्मिन् शङ्कूपरि आरोपितः अर्धगोलः

10.2 3-D आकाराणां दृश्यम्

भवन्तः पठितवन्तः यत् त्रिविमीयवस्तूनि विभिन्नस्थानात् भिन्न-भिन्नरूपेण द्रष्टुं शक्यते । अत एव एतानि विभिन्नपरिपेक्षात् ग्रहीतुं शक्यते । उदाहरणार्थम् एकस्य प्रदत्तकुटीरस्य निम्नलिखितदृश्यं भवितुं शक्यते ।

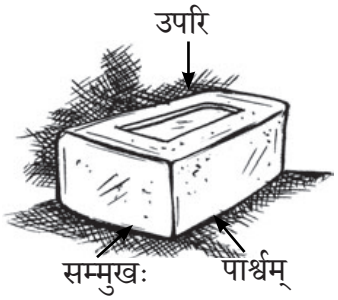


एकं कुटीरम् सम्मुखात् दृश्यम् पार्श्व-दृश्यम् उपरितःदृश्यम्

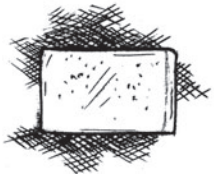
एवमेव एकस्य चषकस्य निम्नलिखितदृश्यं भवितुं शक्यते ।

एकः चषकः पार्श्व-दृश्यम् उपरितः दृश्यम्

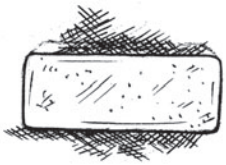
एकस्य चषकस्य उपरिभागतः दृश्यं सङ्केन्द्रियवृत्तानां युग्मं किमर्थम् अस्ति ? यदि एतं भिन्नदिशः पश्यामः चेत् तर्हि किं पार्श्वदृश्यं भिन्नप्रकारकं प्रतीयते ? अस्मिन् विषये विचारयन्तु । इदानीम् एकस्याः ईष्टिकायाः विभिन्नदृश्यं पश्यन्तु ।



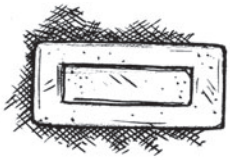
ईष्टिका



सम्मुखात् दृश्यम्

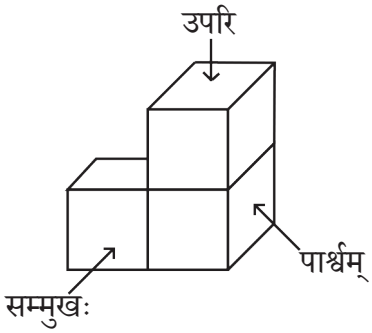


पार्श्व-दृश्यम्



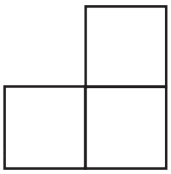
उपरितः दृश्यम्

वयं घनान् संयोज्य निर्मितायाः आकृतेः अपि विभिन्नदृश्यं प्राप्तुं शक्नुमः -



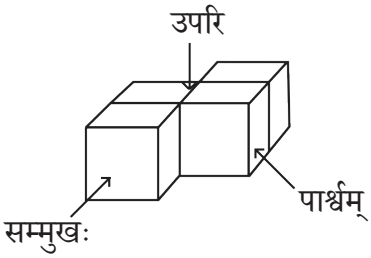
त्रिभिः घनैः निर्मितः सघनः

पार्श्व-दृश्यम्

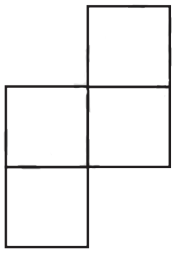


सम्मुखात् दृश्यम्

उपरितः दृश्यम्



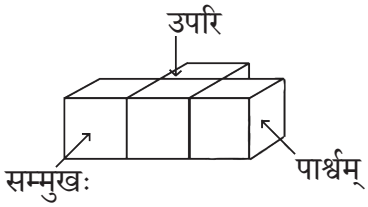
चतुर्भिः घनैः निर्मितः सघनः



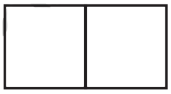
उपरितः दृश्यम्

सम्मुखात् दृश्यम्

पार्श्व-दृश्यम्

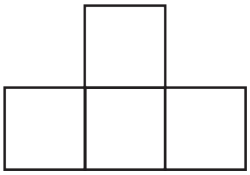


चतुर्भिः घनैः निर्मितः सघनः



पार्श्व-दृश्यम्

सम्मुखात् दृश्यम्



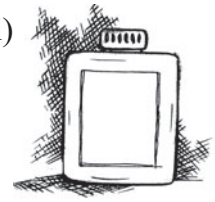
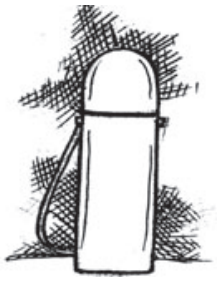
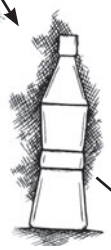
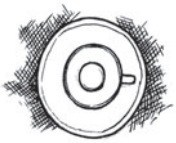
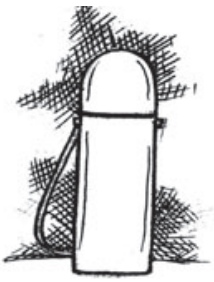
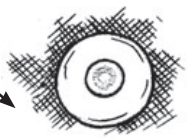
उपरितः दृश्यम्

प्रयासं करोतु

स्वं परितः विभिन्नवस्तूनि विभिन्नपरिस्थितिवशात् पश्यन्तु। स्वकीयमित्रैः सह तेषां विभिन्नदृश्यानां विषये चर्चां कुर्वन्तु।

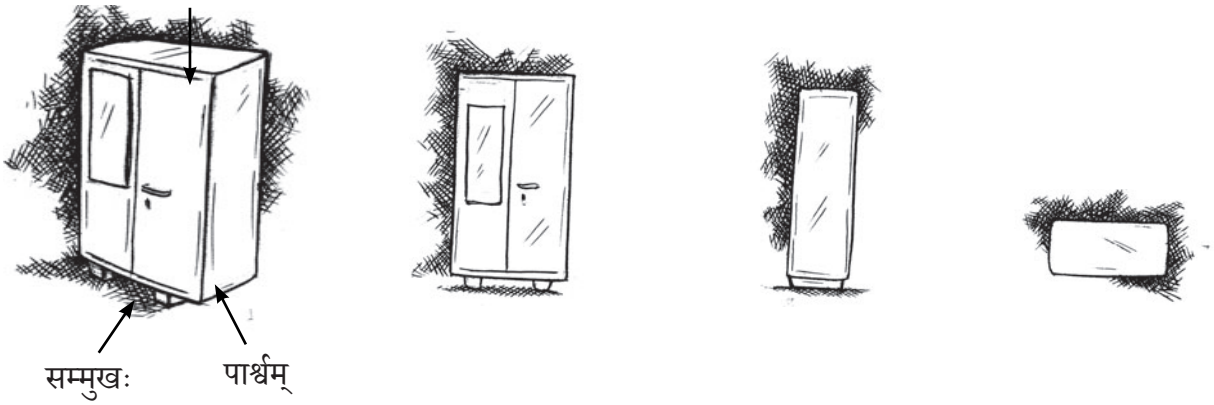
प्रश्नावली 10.1

1. प्रदत्तेषु प्रत्येकं सघनस्य कृते दृश्यद्वयं प्रदत्तम् अस्ति। प्रत्येकं सघनस्य कृते सङ्गतः उपरितः दृश्यं तथा सम्मुखात् दृश्यस्य मेलनं कुर्वन्तु। एषु एकं भवतां कृते कृतं वर्तते।

वस्तु	सम्मुखात् दृश्यम्	उपरितः दृश्यम्
(a) एका कूपी	(i)	(i)
(b) एकं मापकम्	(ii) 	(ii)
(c)  एकं जलपात्रम्	(iii) 	(iii) 
(d) लघुचषकः स्थलिका च	(iv) 	(iv) 
(e) एकं पुटकम्	(v)	(v)

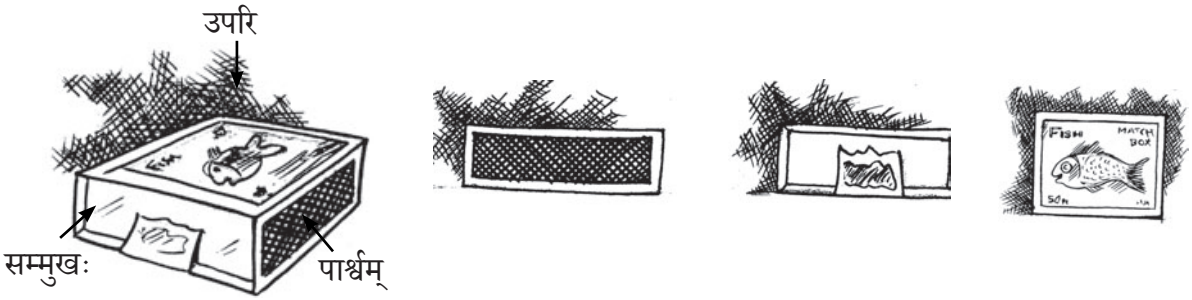
2. प्रदत्तेषु प्रत्येकं सघनस्य कृते दृश्यत्रयं प्रदत्तम् अस्ति। प्रत्येकं सघनस्य कृते सङ्गतः उपरितः दृश्यं तथा सम्मुखात् दृश्यम् अस्ति तत् अभिजानन्तु।

(a) वस्तु (i) (ii) (iii)



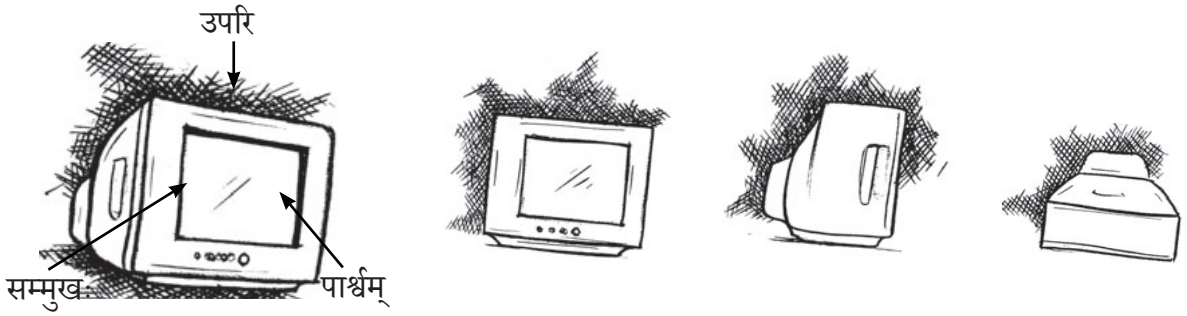
एका अवधानिका

(b)



एका अग्निपेटिका

(c)



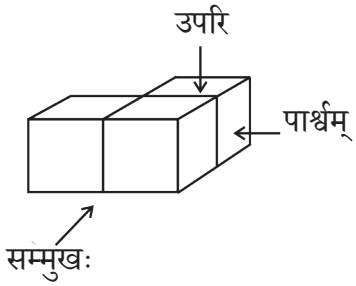
एकं दूरदर्शनम्

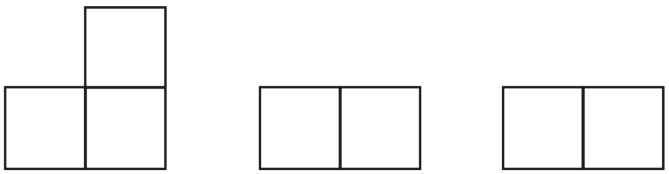
(c)

एकं कारयानम्

3. प्रदत्तेषु प्रत्येकं सघनस्य कृते उपरितः दृश्यं पार्श्वतः दृश्यं तथा सम्मुखात् दृश्यम् अस्ति तत् अभिजानन्तु।

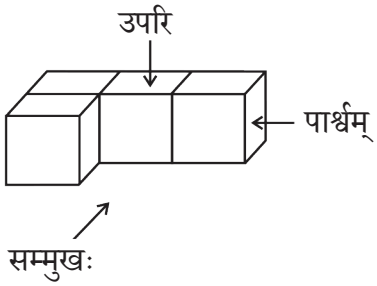
(a)

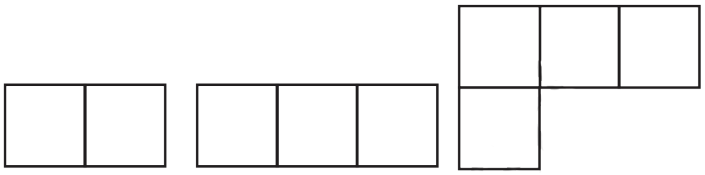




(i) (ii) (iii)

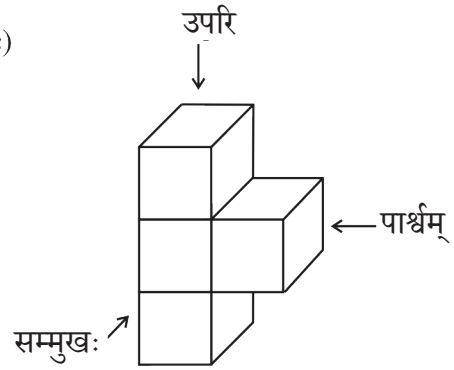
(b)

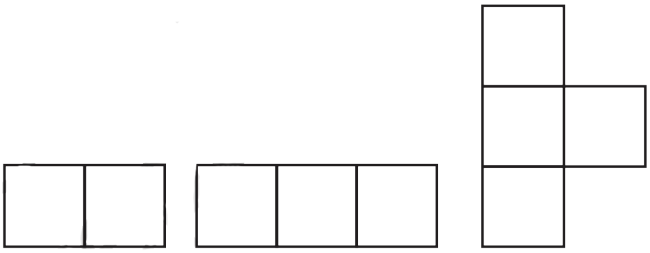




(i) (ii) (iii)

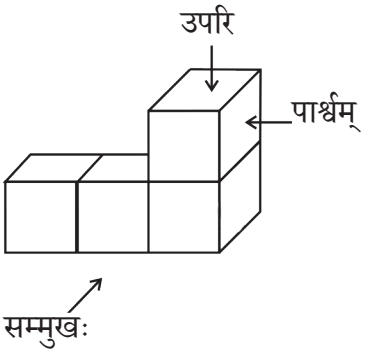
(c)

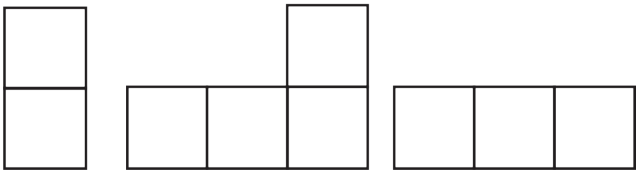




(i) (ii) (iii)

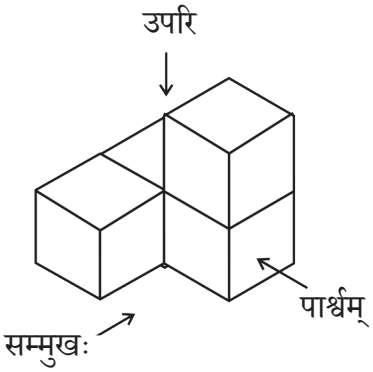
(d)

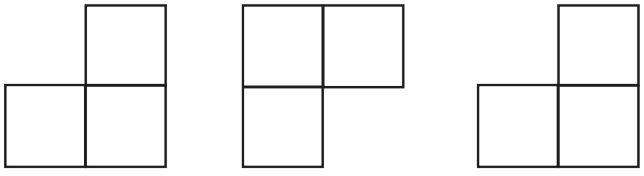




(i) (ii) (iii)

(e)

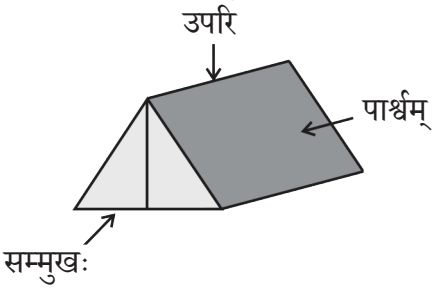




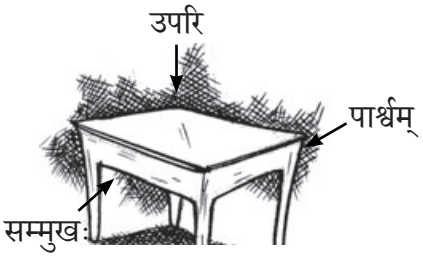
(i) (ii) (iii)

4. प्रदत्तवस्तूनां सम्मुखात् दृश्यं पार्श्वतः दृश्यं तथा उपरितः दृश्यं रचयन्तु।

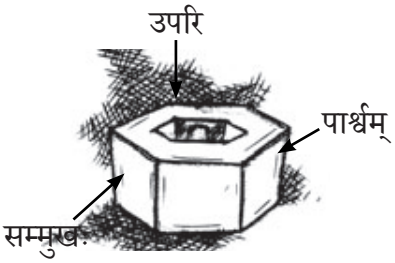
(a) एकं सैन्यमण्डपम्



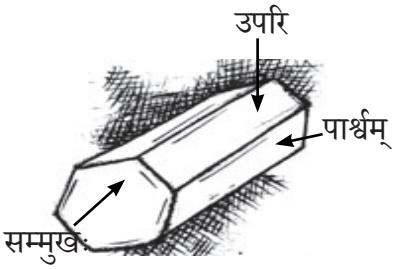
(b) एका उत्पीठिका



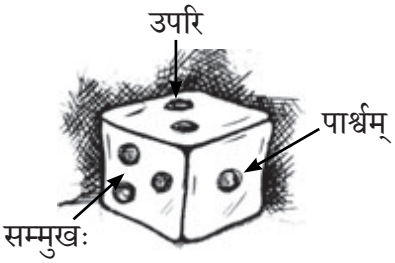
(c) एकः अयःपिञ्जः



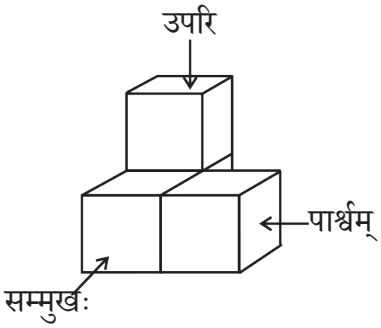
(d) एकः पिधानपिञ्जः



(e) एकः अयःपिञ्जः



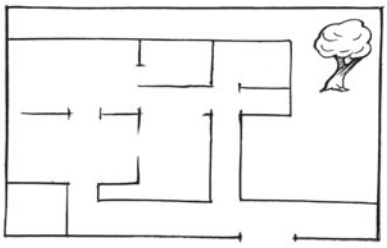
(f) एकः पिधानपिञ्जः



10.3 स्व पार्श्वस्थ स्थानस्य प्रतिचित्रणम्

भवन्तः स्व प्राथमिककक्ष्यातः एव मानचित्रैः अथवा प्रतिचित्रैः सह कार्यं कुर्वन्ति। भूगोले मानचित्रे भवतः एकं विशेषराज्यं , एकां विशिष्टां नदीं , पर्वतादिस्थानं ज्ञापय इति उक्तवान् आसीत्। इतिहासे भवतः पूर्वघटनाविषये ज्ञापय इत्यपि वचनं सम्भवतः आसीत् एव। भवन्तः नदीनां मार्गाणां रेलमार्गाणां व्यापारिकमार्गाणाम् एवमेव बहूनां मार्गाणां चित्रं निर्मापितवन्तः।

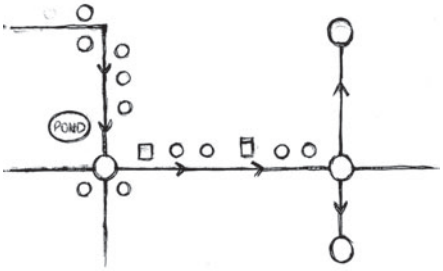
वयं मानचित्रं कथं पठामः ? एकं मानचित्रं पठन-समये वयं किं निष्कर्षं प्राप्नुमः तथा किं ज्ञातुं शक्नुमः ? एकस्मिन् मानचित्रे काः सूचनाः भवन्ति तथा काः सूचनाः न भवन्ति ? किम् एतत् एकस्मात् चित्रात् कस्मिन्नपि अर्थे भिन्नम् अस्ति ? अस्मिन् अनुच्छेदे वयम् एतेषु प्रश्नेषु केषाञ्चन प्रश्नानाम् उत्तरं ज्ञातुं प्रयत्नं करिष्यामः। कस्यापि गृहस्य मानचित्रं पश्यन्तु यस्य चित्रं सहैव प्रदत्तम् अस्ति (आकृतिः 10.1)।



आकृतिः 10.1

अस्याः आकृतेः वयं किं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः ? यदा वयं कमपि चित्रं रचयामः तदा वयं तस्य स्पष्टदर्शनीय संज्ञानस्य वास्तविकतां निरूपितुं प्रयत्नं कुर्मः यद्यपि एकं मानचित्रं कस्यापि वस्तुनः अन्यवस्तूनां सन्दर्भे केवलं स्थानमेव दर्शयति । अपरा वार्ता एषा एव यत् भिन्न-भिन्नव्यक्तिचित्राणां परस्परं पूर्णतया भिन्नविवरणं दातुं शक्नुमः । यः अस्मिन् निर्भरति यत् सः स्वगृहं कस्मात् स्थलात् पश्यन्नस्ति परन्तु एतत् एकमानचित्रस्थितौ सत्यं नास्ति । प्रेक्षकस्य स्थितिः यत्र कुत्रापि भवेत् गृहस्य मानचित्रं तत्रैव भवति । अपरशब्देषु -एकं चित्रं निर्मातुं परिप्रेक्ष्यम् अतीव महत्त्वपूर्णम् अस्ति परन्तु एतत् एकस्य मानचित्रस्य कृते अनुकूलं नास्ति ।

अधुना एकं मानचित्रं (आकृतिः 10.2) इति पश्यन्तु यत् एकः सप्तवर्षीय बालकः राघवः स्व गृहात् विद्यालयपर्यन्तं यः मार्गः गच्छति तस्मै रचितवान् अस्ति । अस्मात् मानचित्रात् भवन्तः किं ज्ञापितुं शक्नुवन्ति यत्



(i) राघवस्य विद्यालयः तस्य गृहात् कियत् दूरे वर्त्तते ?

(ii) मानचित्रे प्रत्येकं वृत्तं किम् एकं गोलचक्रं दर्शयिष्यति ?

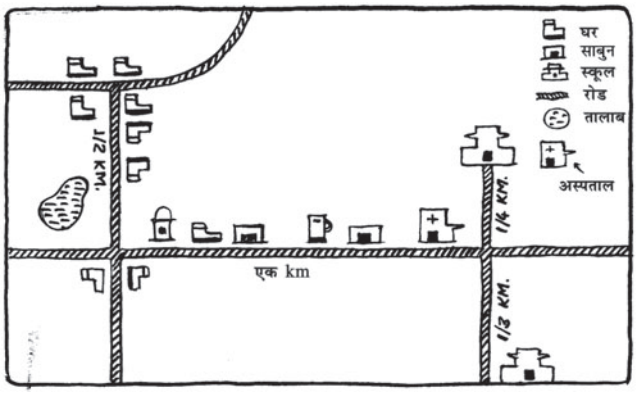
(iii) गृहात् कस्य विद्यालयः सन्निकटः वर्तते राघवस्य उत तस्य भगिन्याः ?

आकृतिः 10.2

प्रदत्तमानचित्रं दृष्ट्वा उपरोक्तप्रश्नानाम् उत्तरदानं बहुकठिनम् अस्ति किं भवन्तः ज्ञापितुं शक्नुवन्ति यत् कथम् ?

अस्य कारणम् इदमेव यत् वयं न जानीमः यत् अस्मिन् दूरीमानं सम्यक् रीत्या अस्ति अथवा रचितवृत्तं गोलाकारकम् अस्ति अथवा किञ्चित् अन्यत् एव निरूपयति ।

इदानीं पुनः एकम् अन्यं मानचित्रं पश्यन्तु यत् तस्याः भगिनी मीना स्व गृहात् स्व विद्यालयस्य मार्गं प्रदर्शयितुं रचितवती (आकृतिः 10.3) ।



आकृतिः 10.3

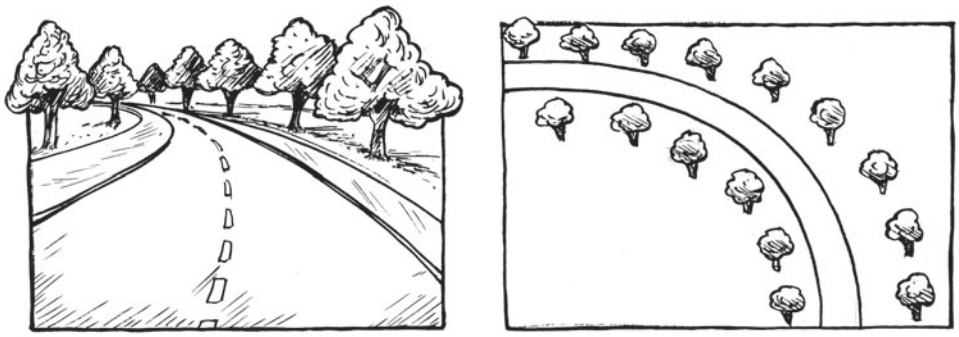
एतत् मानचित्रं पूर्वमानचित्रात् भिन्नम् अस्ति । अत्र मीना भिन्न-भिन्न सीमाचिह्नानां कृते विभिन्न सङ्केतानां प्रयोगं कृतवती । अपरा वार्त्ता इयमेव यत् दूरस्य दीर्घता सूचनाय लम्बायमान-रेखाखण्डानाम् आकलनं कृतवती तथा लघुरेखाखण्डाः अपि रचितवती अर्थात् सा एतत् मानचित्रं एकं मानदण्डानुसारं कृतवती । इदानीं भवन्तः निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं दातुं समर्थाः सन्ति ।

- राघवस्य विद्यालयः तस्य गृहात् कियत् दूरे वर्त्तते ?
- गृहात् कस्य विद्यालयः सन्निकटः वर्तते राघवस्य उत तस्य भगिन्याः ?
- मार्गे कानि-कानि महत्वपूर्णसीमाचिह्नानि सन्ति ?

इत्थं वयम् एतत् अनुभवामः यत् केषाञ्चन सङ्केतानां प्रयोगेन तथा दूरमार्गस्य वर्णनेन वयं मानचित्रं पठितुं सहायतां गृह्णामः । ध्यानं ददतु यत् मानचित्रे प्रदर्शितदूरी भूमौ वास्तविकदूरीणां समानुपातिका अस्ति । एतत् एकम् उपयुक्तमानकं संगृह्य एव भवति । एकस्य मानचित्रस्य रचना समये एतत् ध्यातव्यं यत् तत् कस्मिन् मानके भवेत् अर्थात् तस्य कियत् वास्तविक-दूरी मानचित्रे 1mm अथवा 1cm इत्यनेन व्यक्ता अस्ति । अस्य अर्थः अस्ति यत् यदि कश्चित् जनः एकं मानचित्रं रचयति तर्हि तस्य कृते एतं निर्णयं कर्तुं भवति यत् तस्मिन्

मानचित्रे 1cm स्थानम् एकां निश्चितां दूरीं प्रदर्शयति यथा 1km अथवा 10km दर्शयति। एतत् मानकम् एकस्मात् मानचित्रात् अपरस्मिन् मानचित्रे परिवर्तितुं शक्नोति परन्तु एकस्मिन् एव मानचित्रे न परिवर्तते। उदाहरणार्थं भारतस्यत मानचित्रं देहल्याः मानचित्रेण साकं संयोज्य पश्यन्तु।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् यदा मानचित्रं विभिन्नमानकानुसारेण रचयन्ति तदा मानचित्रद्वये दूरी परिवर्तिता भवति अर्थात् देहल्याः मानचित्रे 1cm स्थानं भारतमानचित्रस्य दूरीणाम् अपेक्षया लघ्वीं दूरीं निरूपयति। स्थानं यावत् दीर्घं भविष्यति तथा रचित-मानचित्रस्य आकारः यावत् न्यूनः भविष्यति तावत् एव अधिकां दूरीं 1cm इत्यनेन निरूपयति। सारांशे वयम् एवं वक्तुं शक्नुमः।

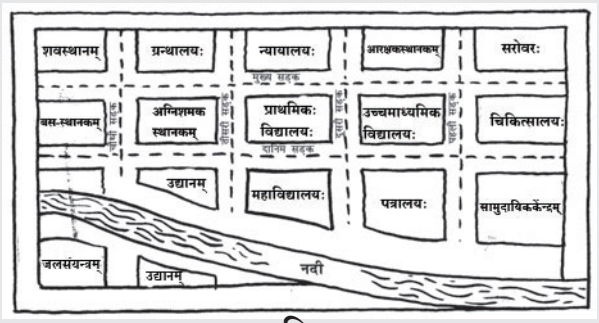


आकृतिः 10.4

1. एकं मानचित्रम् एकं विशेषवस्तुनः/ स्थानस्य / अन्यवस्तूनां / स्थानानां सन्दर्भे स्थितिं प्रदर्शयति।
2. विभिन्नवस्तूनां / स्थानानां प्रदर्शयितुम् उपयुक्तसङ्केतानां प्रयोगः भवति।
3. एकस्मिन् मानचित्रे कश्चिदपि सन्दर्भः अथवा परिप्रेक्ष्यं न भवति अर्थात् प्रेक्षकस्य निकटतमं वस्तु तस्मिन्नेव आकारे प्रदर्शितं भवति यावत् दूरयुक्तं भवति। उदाहरणार्थम्, आकृतिः 10.4 इति पश्यन्तु।
4. प्रत्येकं मानचित्रे एकं मानकं सम्बद्धं भवति यत् एकं विशिष्ट मानचित्राय स्थिरं भवति। एतत् वास्तविकं दूरीं कर्गदे समानुपातिकरूपे न्यूनं करोति।

प्रयासं करोतु

1. एकस्य नगरस्य संलग्नमानचित्रं पश्यन्तु (आकृतिः 10.5)।



आकृतिः 10.5

(a) मानचित्रे एवं रीत्या वर्णरञ्जनं कुर्वन्तु - नीलवर्णः - जलम् , रक्तः -अग्निशमनस्थानकम् ,नारङ्गः - पुस्तकालयः , पीतः - विद्यालयः , हरितः - उद्यानम् , पाटलः - सामुदायिककेन्द्रम् , वृन्ताकः - चिकित्सालयः ,भूसरः - शवस्थानम्।

(b) अपरस्य मार्गस्य तथा दानिममार्गस्य प्रतिच्छेदने एकं हरितं 'x' इति अङ्कयन्तु। यत्र नदी, तृतीयमार्गेण साकं मिलति तत्र एकं कृष्णं 'y' इति अङ्कयन्तुतथा मुख्यमार्गस्य एवं प्रथममार्गस्य प्रतिच्छेदने एकं रक्तं 'Z'इति अङ्कयन्तु।

(c) महाविद्यालयात् सरोवरं यावत् एकस्य मार्गस्य उपमार्गं पाटलवर्णेन अङ्कयन्तु।

2. स्व गृहात् स्व विद्यालयपर्यन्तं मार्गस्य एकं मानचित्रं निर्मापयन्तु तत्र महत्त्वपूर्णं सीमाचिह्नमपि अङ्कयन्तु।

प्रश्नावली 10.2

1. एकस्य नगरस्य कृते प्रदत्तमानचित्रं पश्यन्तु। निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं ददतु -

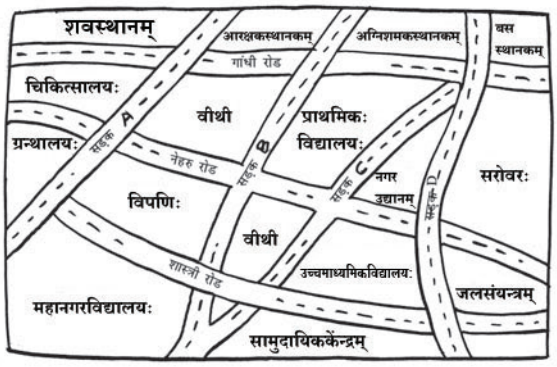
   (a) अस्मिन् मानचित्रे एवं रीत्या वर्णान् पूरयन्तु -

   नीलवर्णः - जलम्, रक्तः - अग्निशमनस्थानकम्,

   नारङ्गः - पुस्तकालयः, पीतः - विद्यालयः,

   हरितः - उद्यानम्, पाटलः - महाविद्यालयः,

   वृन्ताकः - चिकित्सालयः, भूसरः - शवस्थानम्।



   (b) मार्गः C तथा नेहरु मार्गस्य प्रतिच्छेदने एकं हरितं 'X' तथा गान्धीमार्गः तथा मार्गः A इत्यस्य प्रतिच्छेदने एकं हरितं 'Y' इति अङ्कयन्तु।

   (c) पुस्तकालयात् बसयानस्थानकपर्यन्तम् एकं लघु मार्गं रक्तवर्णेन रचयन्तु।

   (d) कः अधिकः पूर्वभागे स्थितः अस्ति - नगरोद्यानम् अथवा आपणः ?

   (e) कः अधिकः दक्षिणदिशि अस्ति - प्राथमिकविद्यालयः अथवा माध्यमिकविद्यालयः ?

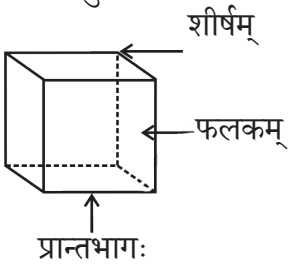
2. उचितमापकानाम् अथ विभिन्नवस्तूनां कृते सङ्केतानां प्रयोगं कुर्वन्तः स्व कक्ष्याप्रकोष्ठस्य एकं मानचित्रं रचयन्तु।

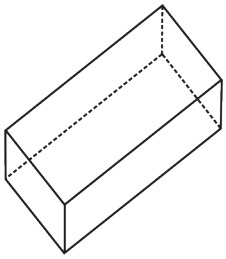
3. उचितमापकानाम् अथ विभिन्न-विशिष्ट-वस्तूनां यथा - क्रीडनकक्षेत्रं, मुख्यभवनम् , उद्यानम् इत्यादीनां कृते सङ्केतानां प्रयोगं कुर्वन्तः स्व विद्यालयपरिसरस्य एकं मानचित्रम् अङ्कयन्तु।

4. स्व मित्रस्य मार्गदर्शनाय एकं मानचित्रं रचयन्तु येन सः स्वगृहं सुखपूर्वकेण प्राप्नोत्।

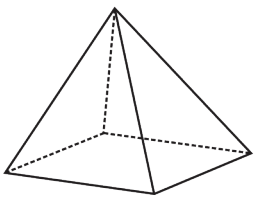
10.4 फलकं प्रान्तभागः तथा शीर्षम्

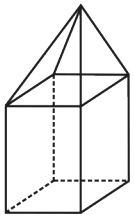
निम्नसघनं पश्यन्तु -

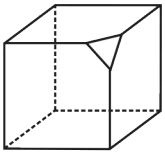




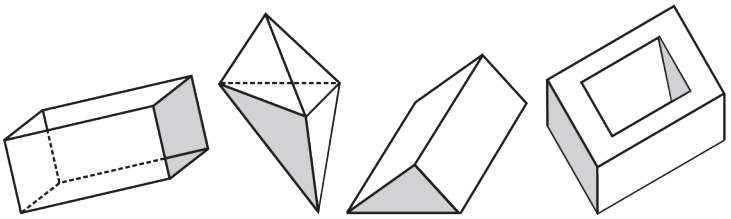
प्रहेलिका - मम कमपि शीर्षं नास्ति।
मम कमपि समतलं फलकं नास्ति।
कः अस्मि अहम् ?



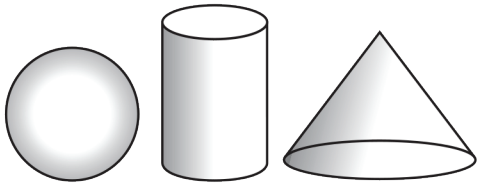




उपरोक्तसघनेषु प्रत्येकं सघनः बहुभुजीयक्षेत्रेण साकं मिलित्वा अभवत् यः तस्य फलकम् इति उच्यते। एतानि फलकानि प्रान्तभागैः अथवा कोणैः सह मिलन्ति। ये रेखाखण्डाः सन्ति तथा एते प्रान्तभागाः शीर्षेण सह मिलन्ति ये बिन्दवः सन्ति। एतादृशं सघनं बहुफलकम् अथवा बहुफलकी नाम्ना ज्ञायते।

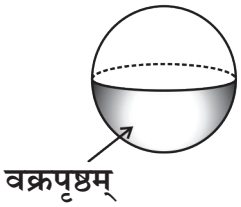


एतानि बहुफलकानि सन्ति



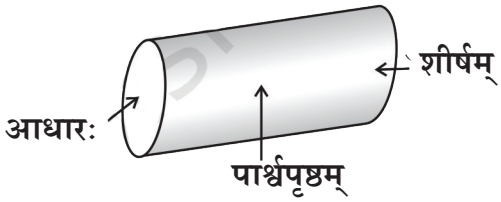
एतानि बहुफलकानि न सन्ति

बहुफलकं तस्मात् सघनात् कथं भिन्नम् अस्ति यत् बहुफलकं नास्ति ? निम्नाकृतीनां ध्यानपूर्वकम् अध्ययनं कुर्वन्तु। भवन्तः त्रिप्रकारकाणां सामान्यसघनानां विषये जानन्ति।



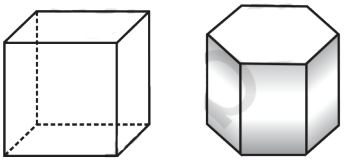
गोलाकारः

शंकुः

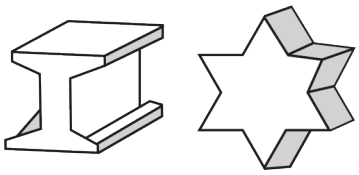


वेलनाकारः

उत्तलबहुफलकम्- भवतां स्मरणे उत्तलबहुभुजस्य अवधारणा अस्ति। उत्तलबहुफलकस्य अवधारणा अपि तादृशी एव अस्ति।

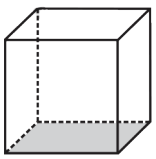


एतानि उत्तलफलकानि सन्ति

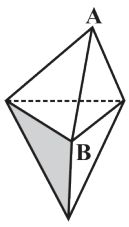


एतानि उत्तलफलकानि न सन्ति

समबहुफलकम्- एकं बहुफलकं तदा समबहुफलकं भवति यदा तस्य सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसम-बहुभुजैः निर्मितानि स्युः तथा प्रत्येकं शीर्षोपरि मेलकफलकानां संख्या समाना स्यात्।

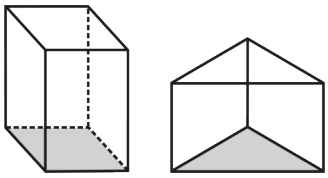


एतत् एकं समबहुफलकम् अस्ति। अस्य सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसमबहुभुजाः सन्ति। फलकानां समानसंख्याभिः शीर्षं भवति।

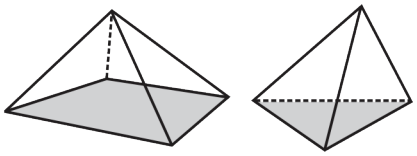


एतत् एकं समबहुफलकं नास्ति सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसमानि न सन्ति परन्तु शीर्षं समानसंख्याभिः न भवन्ति। A इत्यस्मिन् 3 फलकानि मिलन्ति परन्तु B इत्यस्मिन् 4 फलकानि मिलन्ति।

अस्मान् परितः बहुफलकपरिवारे द्वौ महत्त्वपूर्णौ सदस्यौ स्तः ययोः नाम समपार्श्वः अथ शंकुः अस्ति।



एतौ समपार्श्वौ स्तः



एतौ शङ्कू स्तः

वयं कथयामः यत् एकं बहुफलकं समपार्श्वः भवति यदा तस्य आधारः तथा उपरि भागः सर्वाङ्गसमबहुभुजः भवेत् एवं तस्य अन्यं फलकम् अर्थात् पार्श्वफलकं समान्तरचतुर्भुजानाम् आकारः इव भवेत्। अस्य द्वितीयपक्षे एकः शङ्कुः तत् बहुफलकं भवति यस्य आधारः एकः बहुभुजः भवति तथा अस्य पार्श्वफलकम् एकशीर्षीय त्रिभुजः भवति। (यदि भवन्तः एकस्य बहुभुजस्य सर्वं कोणम् अथवा शीर्षम् एकेन ईदृशा बिन्दुना सह मेलयेयुः यः तस्य तले न भवेत् तर्हि भवन्तः त्रिशङ्कोः एकं स्वरूपं प्राप्स्यन्ति।)

एकस्य समपार्श्वस्य अथवा त्रिशङ्कोः तस्य आधारानुसारेण नामाङ्कनं भवति। एवं प्रकारेण एकस्य षट्भुजीय समपार्श्वस्य आधारः एकः षट्भुजः भवति तथा एकस्य त्रिभुजाकारस्य त्रिशङ्कोः आधारः एकः त्रिभुजः भवति। तर्हि एकः आयताकारः समपार्श्वः किम् अस्ति ? एकः वर्गत्रिशङ्कुः किम् अस्ति ? स्पष्टतः एतयोः आधारः क्रमशः आयतः एवं वर्गः अस्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-बहुफलकानां कृते फलकानां प्रान्तभागानां तथा शीर्षाणां संख्यां सारणीबद्धं कुर्वन्तु - (अत्र V शीर्षाणां संख्यां F फलकानां संख्यां तथा E प्रान्तभागानां संख्यां प्रदर्शयति।)

सघनः	F	V	E	F + V	E + 2
घनाभः					
त्रिभुजाकारः					
त्रिभुजाकार-समपार्श्वः					
वर्ग-आधारीय-शङ्कुः					
वर्ग-आधारीय-समपार्श्वः					

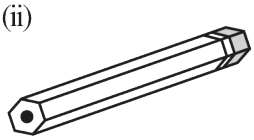
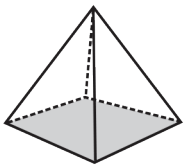
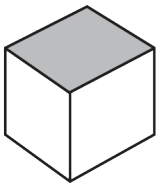
भवन्तः स्तम्भद्वयेन कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ? किं प्रत्येकं स्थितौ भवन्तः F + V = E + 2 अर्थात् F + V - E = 2 प्राप्नुवन्ति ? एषः सम्बन्धः आयलरसूत्रम् इति नाम्ना ज्ञायते। वास्तवरूपे एतत् सूत्रं प्रत्येकं बहुफलकाय सत्यम् अस्ति।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

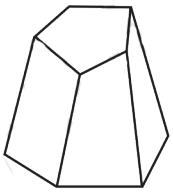
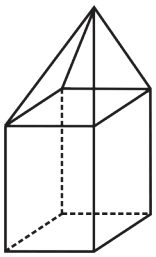
यदि कस्मिन्नपि सघने कमपि अंशं कर्तयेत् तर्हि F, V तथा E इत्यस्मिन् किं परिवर्तनं भवति ? (प्रारम्भकरणाय कञ्चित् घनं स्वीकुर्वन्तु तथा तस्य एकं कोणं कर्तयित्वा अस्य अन्वेषणं कुर्वन्तु।)

प्रश्नावली 10.3

1. किं कस्यापि बहुफलकानां फलकानि निम्नानुसारेण भवितुम् अर्हन्ति ?
   (i) 3 त्रिभुजः (ii) 4 त्रिभुजः (iii) एकः वर्गः तथा चत्वारः त्रिभुजः
2. किम् एतादृशं बहुफलकं सम्भवम् अस्ति यस्य फलकानां संख्या कापि संख्या भवेत् ?
   (सङ्केतः - एकस्य त्रिशङ्कोः विषये चिन्तयन्तु।)
3. निम्नलिखितेषु के के समपार्श्वाः सन्ति ?

(i)
(ii) 
(iii) 
(iv) 

4. (i) समपार्श्वः तथा वेलनाकारः कथम् एकः इव वर्त्तते ?
   (ii) त्रिशङ्कुः तथा शङ्कुः एकः इव कथम् अस्ति ?
5. किं एकः वर्गसमपार्श्वः तथा एकः घनः एकः एव भवति ? स्पष्टीकुर्वन्तु।
6. एताभ्यां सघनाभ्याम् आयलरसूत्रस्य सत्यापनं कुर्वन्तु।

(i) 
(ii) 

7. आयलरसूत्रस्य प्रयोगं कुर्वन्तः अज्ञातसंख्यां जानन्तु।

फलकम्	?	5	20
शीर्षम्	6	?	12
प्रान्तभागः	12	9	?

8. किं कस्यापि बहुफलकस्य 10 फलकानि , 20 प्रान्तभागाः तथा 15 शीर्षाणि भवितुं शक्नुवन्ति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. 2D तथा 3D वस्तूनां परिज्ञानम्।
2. संयोजितानाम् अथवा वस्तूनां मेलने विभिन्नाकाराणां परिज्ञानम्।
3. भिन्न-भिन्न स्थानेन 3Dवस्तूनां भिन्न-भिन्नदृश्यं मिलन्ति।
4. एकं मानचित्रम् एकस्मात् चित्रात् भिन्नं भवति।
5. एकं मानचित्रम् एकस्य विशिष्टवस्तुनः/ स्थानस्य अन्यवस्तूनां / स्थानानां सन्दर्भे सत्यपूर्णां स्थितिं प्रदर्शयति।
6. विभिन्नवस्तूनां / स्थानानां प्रदर्शनाय मानचित्रे सङ्केतानां प्रयोगः भवति।
7. एकस्मिन् मानचित्रे कश्चिदपि सन्दर्भः अथवा परिप्रेक्ष्यं न भवति।
8. प्रत्येकं मानचित्रे एकं मापकं सम्बद्धं भवति यत् एकस्मै विशेषमानचित्राय एकम् एव भवति।
9. कस्यापि बहुफलकाय कृते सूत्रं F + V - E = 2 सत्यं भवति यत्र Fफलकानां संख्यां V शीर्षाणां संख्यां तथा E प्रान्तभागानां संख्यां प्रदर्शयति। एषः सम्बन्धः आयलरसूत्रम् इति नाम्ना ज्ञायते।

अध्यायः

11

क्षेत्रमितिः

11.1 भूमिका

वयम् अध्ययनं कृतवन्तः यत् कस्यापि पिहितसमतल-आकृतेः सीमानं परितः या दूरी वर्त्तते तत् परिमापनम् उच्यते तथा तया आकृत्या आवृत्तक्षेत्रं तस्य क्षेत्रफलम् इति उच्यते। वयं त्रिभुजानां आयतानां वृत्तादि-विभिन्नसमतल-आकृतीनां परिमापनं तथा क्षेत्रफलं कथं ज्ञायते इति ज्ञातवन्तः तथा आयताकार-आकारानां प्रान्तभागानाम् अथवा पगमार्गाणां क्षेत्रफलम् अपि ज्ञातुं शिक्षितवन्तः।

अस्मिन् अध्याये वयं चतुर्भुजः इव द्वितीय-पिहित-आकृतीनां क्षेत्रफलेन एवं परिमापेन सह सम्बन्धित-समस्यां समाधातुं प्रयत्नं कुर्मः। वयं घनानां घनाभानां तथा बेलनाकारसदृशां सघनानां पृष्ठीयक्षेत्रफलस्य एवम् आयतनस्य अपि अध्ययनं कुर्मः।

11.2 आगच्छन्तु स्मरणं कुर्मः

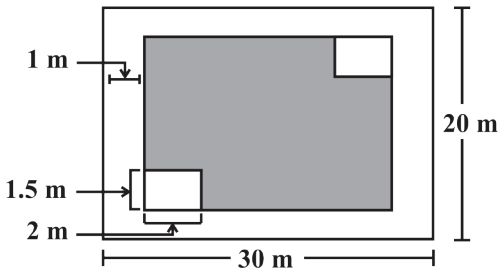
स्वकीय पूर्वज्ञानस्य सर्वेक्षणाय वयम् एकस्य उदाहरणस्य चर्चां कुर्मः। एषा एकस्य आयताकार-उद्यानस्य आकृतिः अस्ति यस्य औन्नत्यं 30 मीटरपर्यन्तं तथा वैशाल्यं 20 मीटरपरिमितम् अस्ति।

(आकृतिः 11.1)

(i) एतत् उद्यानं चतुर्दिक्षु आवृत्तं कर्तुं या भित्तिः वर्तते तस्य लम्बं किम् अस्ति ? भित्तेः औन्नत्यं ज्ञातुम् अस्माकं कृते तस्य उद्यानस्य परिमापं ज्ञातुम् आवश्यकम् अस्ति यत् 100 मीटरपरिमितम् अस्ति। (परीक्षणं कुर्वन्तु)।

(ii) कियत् परिमिता भूमिः उद्यानेन व्याप्तम् अस्ति ? अनेन उद्यानेन व्याप्तां भूमिं ज्ञातुम् अस्माकं कृते अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् आवश्यकं वर्त्तते यत् 600 वर्गमीटर परिमितम् (m^2) अस्ति (कथम् ?)

(iii) उद्यानस्य परिमापेन सह अन्तः एकमीटरपरिमितः वैशाल्ययुक्तः मार्गः अस्ति यस्मिन् पाषाणचूर्णं योजनीयम् अस्ति यदि 4 वर्गमीटरपरिमिते (m^2) क्षेत्रफले पाषाणचूर्णं योक्तुं एकगोणी परिमितं पाषाणचूर्णं लगिष्यति तर्हि अस्मिन् सम्पूर्णे मार्गे पाषाणचूर्णं योक्तुं कति पाषाणचूर्णस्य गोणिकायाः आवश्यकता वर्त्तते ?



आकृतिः 11.1

वयं कथयितुं शक्नुमः यत् उपयोज्यमान

$$\text{पाषाणचूर्णस्य गोणीनां संख्या} = \frac{\text{मार्गस्यक्षेत्रफलम्}}{\text{1 गोण्यापाषाणचूर्णेनकृतंक्षेत्रफलम्}}$$

पाषाणचूर्णेन निर्मीयमानस्य मार्गस्य क्षेत्रफलम् =

उद्यानस्य क्षेत्रफलम् - उद्यानस्य तत् क्षेत्रफलं यस्मिन् पाषाणचूर्णं नापेक्षते। मार्गस्य वैशाल्यं 1 मीटरपरिमितम्

अस्ति अत एव यस्मिन् भागे पाषाणचूर्णं न लगिष्यति तस्य आयताकारं क्षेत्रफलम् $(30-2)\times(20-2)m^2$ अस्ति।

एतत् $28 \times 18\ m^2$ अस्ति। अतः उपयोगे योज्यमानानां पाषाणचूर्णस्य गोणीनां संख्या = ...

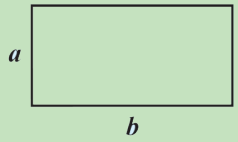
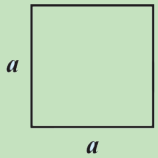
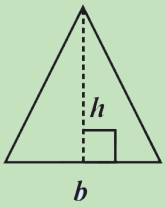
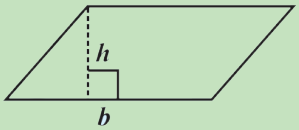
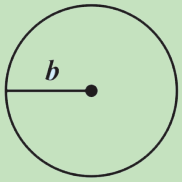
(iv) यथा आरेखे (आकृतिः 11.1) प्रदर्शितम् अस्ति। अस्मिन् उद्याने पुष्पाणां द्वौ आयताकारौ केदारौ स्तः। ययोः प्रत्येकम् आकारः 1.5 m×2 m अस्ति तथा अवशिष्ट-उद्यानस्य उपरि घासः अस्ति। घासेन आवृत्तं क्षेत्रफलं जानन्तु।

आयताकारकेदारानां क्षेत्रफलम् = ...

मार्गे पाषाणचूर्णस्य योजनानन्तरम् उद्यानस्य अवशिष्टं क्षेत्रफलम् = ...

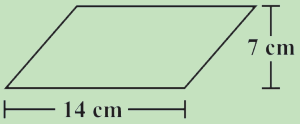
घासेन आवृत्तं क्षेत्रफलम् = ...

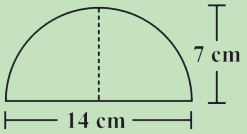
यदि अस्मभ्यं किञ्चित् निश्चितं मापं दत्तम् अस्ति तर्हि आयतानाम् अतिरिक्तं वयम् एतत् अधिकम् अपि ज्यामितीय-आकाराणां क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुमः। निम्नलिखितानां स्मरणं करणार्थं मेलनार्थञ्च प्रयत्नं कुर्वन्तु।

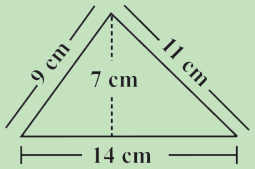
आरेखः	आकारः	क्षेत्रफलम्
	आयतः	a×a
	वर्गः	b×h
	त्रिभुजः	πb^2
	समान्तरचतुर्भुजः	$\frac{1}{2}$ b×h
	वृत्तः	a×b
किं भवन्तः उपर्युक्त-	आकारेषु प्रत्येकं परिमापस्य सूत्रं	लेखितुं शक्नुवन्ति ?

प्रयासं करोतु

(a) निम्नलिखित-आकृतीनां तेषां क्षेत्रफलेन साकं मेलनं कुर्वन्तु -





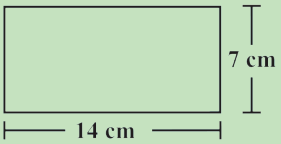


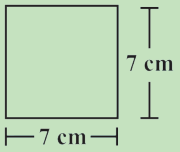
49 cm^2

77 cm^2

98 cm^2

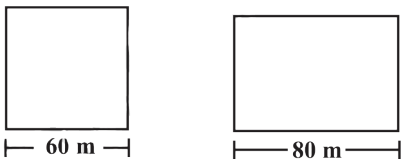
(b) प्रत्येकम् आकारस्य परिमापं लिखन्तु।





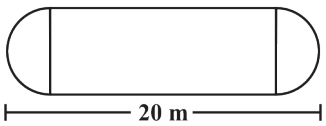
प्रश्नावली 11.1

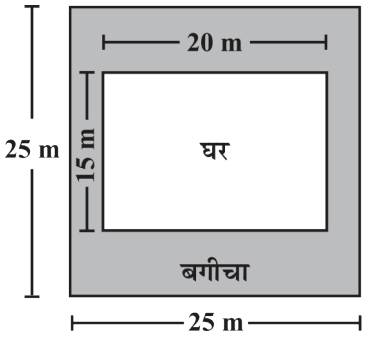
1. यथा संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति एकस्य आयताकारस्य तथा एकस्य वर्गाकारक्षेत्रस्य मापनं प्रदत्तम् अस्ति यदि एतस्य परिमापनं समानम् अस्ति तर्हि कस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अधिकं भविष्यति ?



2. श्रीमतिकौशिकस्य पार्श्वे चित्रे प्रदर्शितं मापयुक्तः एकः वर्गाकारक्षेत्रभागः अस्ति। सा भूमिखण्डमध्ये एकं गृहं निर्मातुम् इच्छति। गृहं परितः एकम् उद्यानं विकसितम् अस्ति। 55 रुप्यकात्मकं प्रतिवर्गमीटरं प्रतिमानेन अस्य उद्यानस्य विकासार्थं व्ययं जानन्तु।

3. यथा आरेखे प्रदर्शितम् अस्ति , एकस्य उद्यानस्य आकारः मध्ये आयताकारः अस्ति तथा प्रान्तभागे अर्धवृत्तरूपे अस्ति। अस्य उद्यानस्य परिमापं तथा क्षेत्रफलं जानन्तु [आयतस्य औन्नत्यं 20 - (3.5 + 3.5) मीटरपरिमितम् अस्ति।]

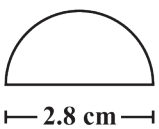




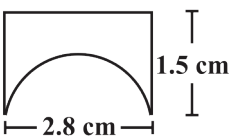
4. भूतलं निर्मातुं उपयोज्यमानस्य एकस्य सङ्गमरप्रस्तरस्य आकारः समान्तर चतुर्भुजस्य अस्ति यस्य आधारः 24 cm तथासङ्गतस्य औन्नत्यं 10cm अस्ति। 1080 वर्गमीटरपरिमितस्य एकस्य क्षेत्रफलस्य एकं भूतलम् आच्छादितुम् ईदृशानां कति सङ्गमरप्रस्तराणाम् आवश्यकता अस्ति ? (भूतलस्य कोणान् पूरितुं भवन्तः स्व आवश्यकतानुसारं सङ्गमरप्रस्तरान् केनापि प्रकारेण त्रोटितुं शक्नुवन्ति।)

5. एका पिपीलिका भूतले विकरितानां विभिन्नप्रकारकाणाम् अन्नकणानां चतुर्दिक्षु भ्रमति। भोज्यपदार्थस्य कस्मै कणाय पिपीलिकायाः कृते लम्बचक्रंकर्तुं भविष्यति ? स्मरणे रक्षन्तु यत् वृत्तस्य परिधिं भवन्तः $c=2\pi r$ इति सूत्रस्य साहाय्येन प्राप्तुं शक्नुवन्ति। यत्र r वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति।

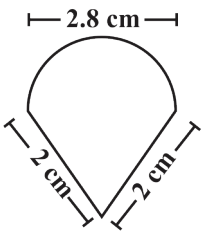
(a)

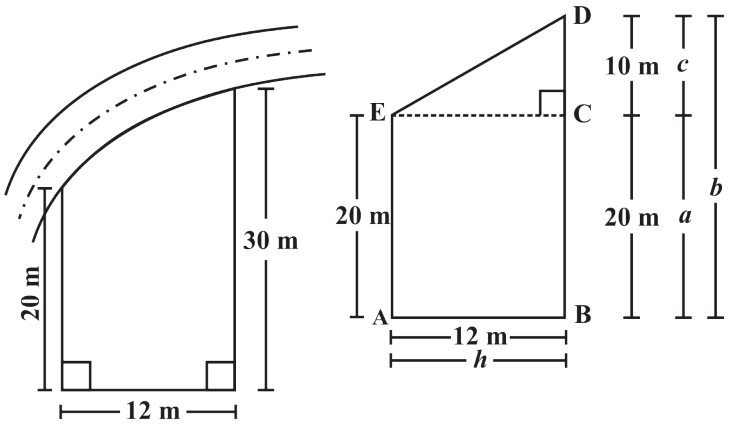


(b)



(c)





11.3 समलम्बस्य क्षेत्रफलम्

नजमायाः पार्श्वे मुख्यमार्गस्य पार्श्वे एकः भूभागः अस्ति (आकृतिः 11.2)। तस्याः भूभागः प्रातिवेशिकस्य भूभागस्य आकारः इव नास्ति । अस्मिन् भूभागे सम्मुखभुजानां केवलम् एकः युग्मः समान्तरः अस्ति। अत एव एषः प्रायशः समलम्बस्य आकारसदृशः एव अस्ति। किं भवन्तः अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? आगच्छन्तु यथा 11.3 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति वयम् अस्य भूभागस्य शीर्षं नामानि दद्मः । EC||AB इति निर्माय वयम् एतं भूखण्डं भागद्वये विभक्तुं शक्नुमः ययोः एकः आयताकारः आकारः अस्ति तथा द्वितीय त्रिभुजस्य आकारः वर्तते। (एतत् C इत्यस्मिन् समकोणः अस्ति) (यथा 11.3 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति।)

$\triangle$ECD इत्यस्य क्षेत्रफलं $= \frac{1}{2}$ h Wc $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 m^2$

आयतः ABCE इत्यस्य क्षेत्रफलं $= h \times a = 12 \times 20 = 240 m^2$

समलम्बचतुर्भुजस्य ABDE इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\triangle$ECD इत्यस्य क्षेत्रफलम् + आयतः ABCE इत्यस्य क्षेत्रफलम् $= 60 + 240 = 300 m^2$

वयं एते क्षेत्रफले संयुक्तरूपेण लिखामः। एवं रीत्या

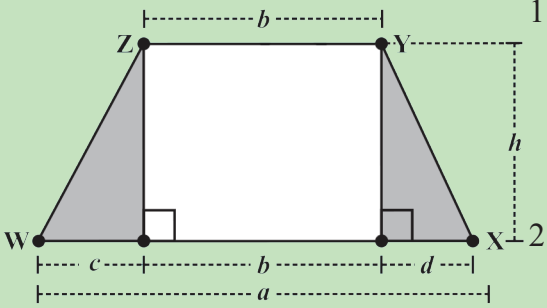
समलम्बः ABDE इत्यस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} h \times c + h \times a = h \left(\frac{c}{2} + a \right)$

$$= h \frac{c + 2a}{2} = h \frac{c + a + a}{2}$$

$$= h \frac{(b+a)}{2} = \text{औन्नत्यं} \frac{(\text{समान्तर-भुजानांयोगः})}{2}$$

अस्मिन् व्यञ्जके h, b तथा a इत्यस्य मानं रक्षणे सति वयं h $\frac{(b+a)}{2} = 300 m^2$ प्राप्नुमः।

प्रयासं करोतु

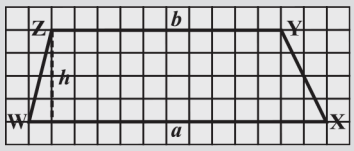


आकृतिः 11.4

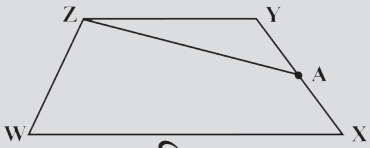
1. नजमायाः भगिन्याः पार्श्वे अपि समलम्बाकारयुक्तः एकः भूभागः अस्ति यथा 11.4 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति एतत् त्रिषु भागेषु विभजन्तु । प्रदर्शयन्तु यत् समलम्बस्य WXYZ इत्यस्य क्षेत्रफलं = h $\frac{(b+a)}{2}$
2. यदि h=10cm, c=6cm, b=12cm, d=4cm तर्हि अस्य प्रत्येकभागस्य मानं पृथक्-पृथक् जानन्तु तथा WXYZ इत्यस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् एतेषां योगं कुर्वन्तु । h ,a तथा b इत्यस्य मानव्यञ्जकः $\frac{h(a+b)}{2}$ इत्यस्मिन् संस्थापयन् अस्य सत्यापनं कुर्वन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

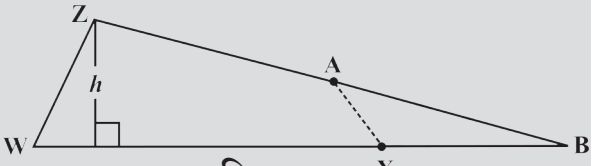
1. आलेख-कर्गदस्य (रेखाङ्कितं कर्गदस्य) अन्तः कञ्चित् समलम्बं WXYZ इति रचयन्तु यथा 11.5 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति तथा एतत् कर्तयित्वा बहिः निष्कासयन्तु।
2. XY इति भुजं पुटीकृत्य अस्य मध्यबिन्दुं जानन्तु तथा एतस्य नाम A इति कुर्वन्तु (आकृतिः 11.6)।
3. ZA इत्यनेन भुजेन सह कर्तयन्तः WXYZ इति भागद्वये कर्तयन्तु। $\triangle$ZYA इति एवं स्थापयन्तु यथा 11.7 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति यस्मिन् AY इति AX इत्यस्य उपरि संस्थापितम् अस्ति।
   बृहत् त्रिभुजाकारस्य औन्नत्यम् किम् अस्ति ? अस्य त्रिभुजक्षेत्रफलस्य व्यञ्जकं लिखन्तु (आकृतिः 11.7)।
4. अस्य त्रिभुजस्य तथा WXYZ इति समलम्बस्य क्षेत्रफलं समानम् अस्ति। (कथम् ?) त्रिभुजक्षेत्रफलव्यञ्जकस्य उपयोगं कुर्वन्तः समलम्बक्षेत्रफलस्य व्यञ्जकं प्राप्नुवन्तु।



आकृतिः 11.5



आकृतिः 11.6

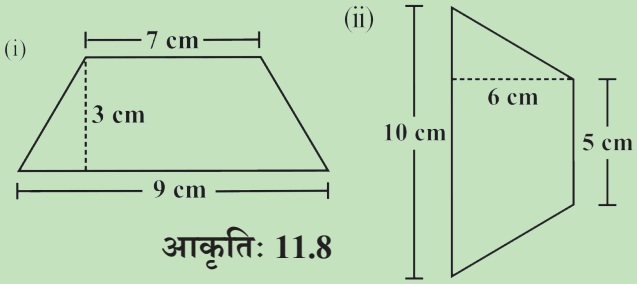


आकृतिः 11.7

एवं रीत्या समलम्बस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् अस्माकं कृते समान्तरभुजानाम् औन्नत्यं तथा एतयोः द्वयोः समान्तर-भुजयोः मध्ये लम्बायमानां दूरीं ज्ञातुम् आवश्यकता अस्ति। समान्तरभुजानाम् औन्नत्यस्य योगः तथा एतयोर्मध्ये लम्बायमानादूर्याः गुणनफलस्य अर्धतः वयं समलम्बस्य क्षेत्रफलं प्राप्नुमः।

प्रयासं करोतु

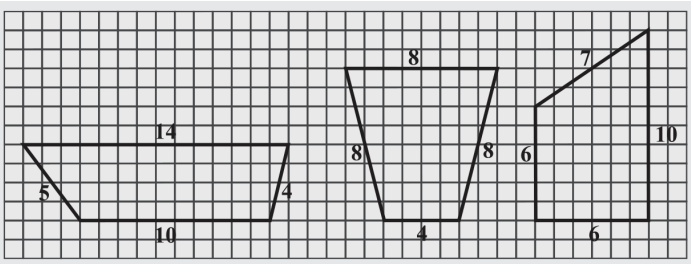
निम्नलिखित-समलम्बस्य क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.8)



आकृतिः 11.8

एतत् कुर्वन्तु

VII कक्ष्यायां वयं विभिन्नपरिमापयुक्तानां समान-क्षेत्रफलान्वित-समान्तर-चतुर्भुजानां रचनां शिक्षितवन्तः। किम् एतत् समलम्बानां कृते अपि कर्तुं शक्यते ? परीक्षयन्तु किं विभिन्न-परिमापयुक्तानां निम्नलिखितसमलम्बानां क्षेत्रफलानि समानानि सन्ति। (आकृतिः 11.9)



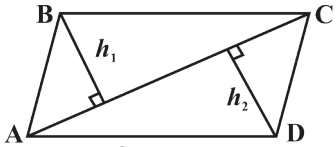
आकृतिः 11.9

वयं जानीमः यत् सर्वाः सर्वाङ्गसमाः आकृतयः क्षेत्रफले समानाः भवन्ति। किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् समानक्षेत्रफलयुक्ताः आकृतयः सर्वाङ्गसमाः अपि भवन्ति ? किम् एताः आकृतयः सर्वाङ्गसमाः सन्ति ?

एकस्मिन् वर्गाकारकर्गदे न्यूनातिन्यूनम् एतादृशं समलम्बं रचयन्तु यस्य परिमापनं समानं स्यात् परन्तु क्षेत्रफलं विभिन्नं भवेत्।

11.4 सामान्य चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्

कस्यापि सामान्यचतुर्भुजस्य एकं विकर्णं रचयित्वा तं त्रिभुजद्वये विभजितुं शक्नुवन्ति। एषा विभक्तकरणस्य क्रिया सामान्यचतुर्भुजस्य कृते सूत्रं ज्ञातुं सहायतां करोति। प्रदत्त-आकृतेः अध्ययनं कुर्वन्तु। (आकृतिः 11.10) ABCDइति चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्



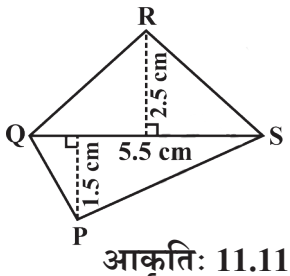
आकृतिः 11.10

= ($\triangle$ABC इत्यस्यक्षेत्रफलम्)+($\triangle$ADC इत्यस्यक्षेत्रफलम्)

$= (\frac{1}{2}\ ACX\ h_1)+(\frac{1}{2}\ ACX\ h_2) = \frac{1}{2}\ ACX\ (h_1+h_2)$

$= \frac{1}{2}\ d\ (h_1+h_2)$ अत्र AC इत्यस्य औन्नत्यं d अस्ति।

उदाहरणम् 1 11.11 आकृतौ प्रदर्शितचतुर्भुजस्य PQRSइत्यस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



आकृतिः 11.11

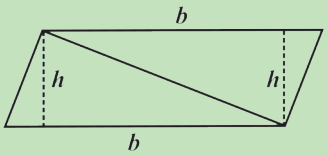
समाधानम् अत्र d=5.5cm, h_1= 2.5cm, h_2=1.5cm,

क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}\ d\ (h_1+h_2) = \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5+1.5)\ cm^2$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4cm^2 = 11cm^2$

प्रयासं करोतु

वयं जानीमः यत् समान्तरचतुर्भुजः अपि एकः चतुर्भुजः अस्ति। आगच्छन्तु एतम् अपि वयं त्रिभुजद्वये विभक्तं कुर्मः तथा द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलं जानीमः। एवं रीत्या समान्तर-चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् अपि जानीमः। किम् एतत् सूत्रं भवद्भिः पूर्वज्ञातसूत्रेण साकं मिलति ? (आकृतिः 11.12)



आकृतिः 11.12

11.4.1 विशेष-चतुर्भुजानां क्षेत्रफलम्

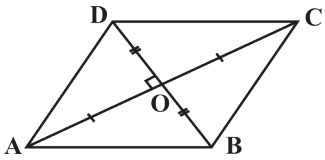
त्रिभुजेषु विभजितुम् एतं विधिं वयं समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य सूत्रं ज्ञातुम् उपयोगं कर्तुं शक्नुमः। 11.13 आकृतौ ABCD इति नाम एकः समचतुर्भुजः अस्ति। अत एव अस्य विकर्णाः परस्परं समद्विविभाजकाः अस्ति।

समचतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य क्षेत्रफलं

= ($\triangle$ACD इत्यस्यक्षेत्रफलम्)+($\triangle$ABC इत्यस्यक्षेत्रफलम्)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right) = \frac{1}{2} AC \times (OD+OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \qquad AC = d_1 \quad BD = d_2$$



आकृतिः 11.13

द्वितीयशब्देषु समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं तस्य विकर्णानां गुणनफलस्य अर्धम् अस्ति।

उदाहरणम् 2 एकम् एतादृशस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्य विकर्णानाम् औन्नत्यं 10cm तथा 8.2cm स्तः।

समाधानम् : समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} d_1 d_2$, यत्र d_1, d_2 विकर्णानाम् औन्नत्यम् अस्ति।

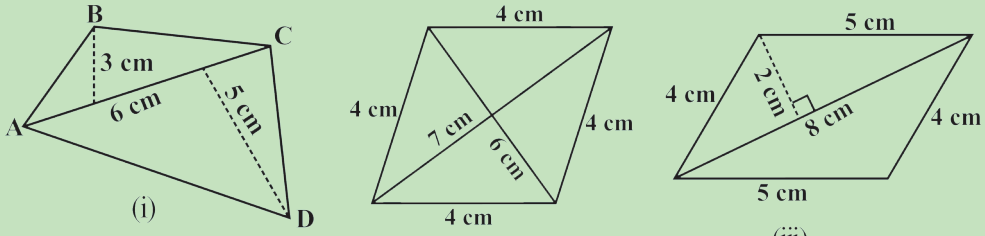
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 cm^2 = 41 cm^2$$

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

समान्तरचतुर्भुजस्य विकर्णं रचयित्वा तं द्वयोः सर्वाङ्गसम-त्रिभुजयोः विभज्यते। किं समलम्बम् अपि द्वयोः सर्वाङ्गसम-त्रिभुजयोः विभजितुं शक्यते ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

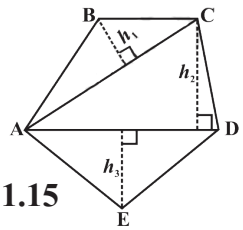
निम्नलिखित-चतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु। (आकृतिः 11.14)



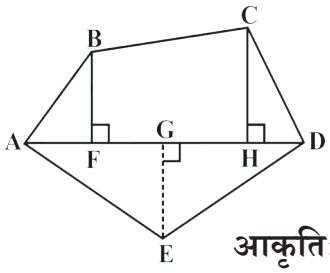
आकृतिः 11.14

11.5 बहुभुजस्य क्षेत्रफलम्

वयम् एकं चतुर्भुजं त्रिभुजेषु खण्डितं कुर्मः तथा अस्य क्षेत्रफलं जानीमः। एतादृशस्य विधेः उपयोगः बहुभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवितुं शक्नोति। एकस्य पञ्चभुजस्य कृते निम्नलिखिते विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 11.15, 11.16)।



आकृतिः 11.15



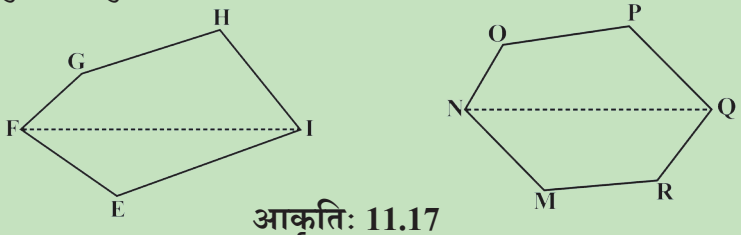
आकृतिः 11.16

ACतथाAD विकर्णस्य रचनां कुर्वन्तः AB-CDEइति पञ्चभुजं त्रिषु भागेषु विभक्तं वर्तते। अत एव ABCDE इत्यस्य क्षेत्रफलं =△ABC इत्यस्यक्षेत्रफलम्+△ADC इत्यस्यक्षेत्रफलम्+△

एतत् एकं समबहुफलकं नास्ति सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसमानि न सन्ति परन्तु शीर्षं समानसंख्याभिः न भवन्ति। A इत्यस्मिन् 3 फलकानि मिलन्ति परन्तु B इत्यस्मिन् 4 फलकानि मिलन्ति।

प्रयासं करोतु

(i) निम्नलिखित-बहुभुजानां (आकृतिः 11.17) क्षेत्रफलं ज्ञातुम् एतान् (त्रिभुजेषु समलम्बेषु च) विभिन्नभागेषु विभजन्तु।



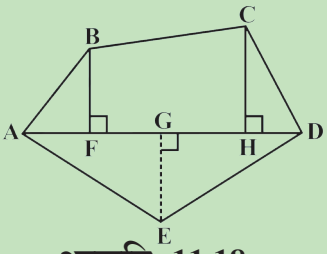
आकृतिः 11.17

(ii) ABCDE इति बहुभुजं विभिन्नभागेषु विभक्तं वर्तते यथा 11.18 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। यदि AD = 8cm, AH=6cm, AG=4cm, AF=3cm,तथा लम्बः BF= 2cm, CH=3cm, EG= 2.5cm, तर्हि अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। ABCDE इति बहुभुजस्य क्षेत्रफलं = $\triangle$AFB इत्यस्य क्षेत्रफलं + ...

$\triangle$AFBइत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}\times AF\times BF = \frac{1}{2}\times 3\times 2 = ...$

समलम्बः FBCH इत्यस्य क्षेत्रफलं =$FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

$= 3\times\frac{(2+3)}{2}$ [FH=AH-AF]

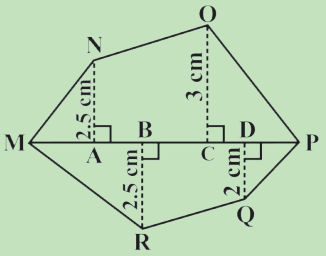


आकृतिः 11.18

$\triangle$CHD इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}\times HD\times CH = ...$; $\triangle$ADC इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}\times AD\times GE = ...$

अत एव ABCDE इत्यस्य क्षेत्रफलम् = ...

(iii) यदि MP = 9cm, MD = 7cm, MC = 6cm, MB = 4cm, MA = 2 cm तर्हि बहुभुजः MNOPQR (आकृतिः 11.19) इत्यस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।NA, OC एवं RB विकर्णाः MP इत्यस्मिन् रचिताः लम्बाः सन्ति



आकृतिः 11.19

उदाहरणम् 1 समलम्बाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं $480m^2$ अस्ति, द्वयोः समान्तरभुजयोः दूरी 15m अस्ति तथा तयोः एकस्य समान्तरभुजयोः औन्नत्यं 20 m अस्ति। द्वितीय-समान्तर-भुजयोः औन्नत्यं जानन्तु।

समाधानम् समलम्बस्य समान्तरभुजेषु एकस्य औन्नत्यं a=20m, इति स्वीकुर्वन्तु द्वितीयसमान्तरभुजः b अस्ति औन्नत्यं h=15m

समलम्बस्य प्रदत्तं क्षेत्रफलम् = $480m^2$

समलम्बस्य प्रदत्तं क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ h (a+b)

अत एव $480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20+b)$ अथवा $= \frac{(480 \times 2)}{15} = 20+b$

अथवा $64=20+b$ अथवा $b=44m$

अतः समलम्बस्य द्वितीयसमान्तरभुजः 44m अस्ति।

उदाहरणम् 2 एकस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं $240cm^2$ अस्ति तथा विकर्णेषु एकस्य औन्नत्यं 16cm अस्ति।द्वितीयविकर्णं जानन्तु।

समाधानम्स्वीकुर्वन्तु एकस्य विकर्णस्य औन्नत्यं $d_1=16cm$

तथा द्वितीयविकर्णस्य औन्नत्यम् $= d_2$

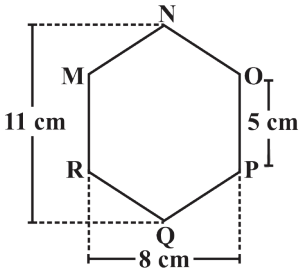
समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} d_1.d_2=240$

अतएव $\frac{1}{2}\ 16.d_2 = 240$

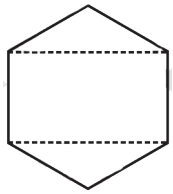
अतः $d_2 = 30cm$

एवं रीत्या द्वितीयविकर्णस्य औन्नत्यं 30cm अस्ति।

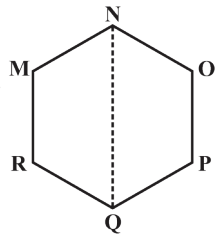
उदाहरणम् 3 MNOPQR (आकृतिः 11.20) एकः षड्भुजः अस्ति यस्य प्रत्येकं भुजः 5 cm अस्ति। अमनः तथा रिधिमा एतं भिन्न-भिन्नरीत्या विभजति (आकृतिः 11.21)। उभयविध-प्रकारकयोः उपयोगं कुर्वन्तः अस्य षड्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



आकृतिः 11.20



रिधिमायाः विधिः

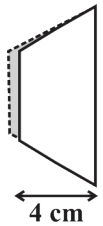


अमनस्य विधिः

आकृतिः 11.21

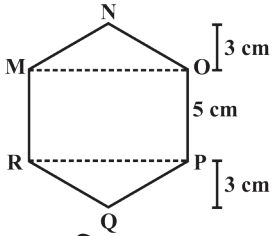
समाधानम् अमनस्य विधिः

यतो हि एषः एकः षड्भुजः अस्ति अत एव NQ एतं षड्भुजं सर्वाङ्गसम-समलम्बेषु विभजन्तु भवन्तः एतं कर्गदपुटीकरण- विधि माध्यमेन सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति। (आकृतिः 11.22)



आकृतिः 11.22

अधुना समलम्बः MNQRइत्यस्य क्षेत्रफलं $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32cm^2$



आकृतिः 11.23

अत एव MNOPQR षड्भुजः इत्यस्य क्षेत्रफलं $=2 \times 32 = 64cm^2$ रिधिमायाः विधिः

$\triangle$MNOतथा $\triangle$RPQ सर्वाङ्गसम-त्रिभुजौ स्तः येषु प्रत्येकं शीर्षलम्बः 3 cm अस्ति (आकृतिः 11.23) (1)

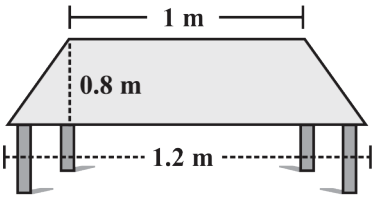
भवन्तः एतान् त्रिभुजान् कर्तयित्वा तथा परस्परम् उपरि नीचैः संस्थाप्य अस्य सत्यापनं कर्तुं शक्नुवन्ति।

$\triangle$MNO इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}\times 8\times 3$ = $12cm^2$ इत्यस्य क्षेत्रफलं MOPR आयतस्य क्षेत्रफलं = $8\times 5=40cm^2$

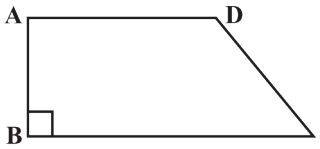
अधुना षड्भुजः MNOPQR इत्यस्य क्षेत्रफलं $=40+12+12=64cm^2$

प्रश्नावली 11.2

1. एकस्याः उत्पीठिकायाः पृष्ठस्य आकारः समलम्बः इव अस्ति । यदि अस्य समान्तरभुजौ 1m तथा 1.2 m स्तः एवम् एतयोः समान्तरभुजयोः मध्यस्था दूरी 0.8 m अस्ति तर्हि अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।

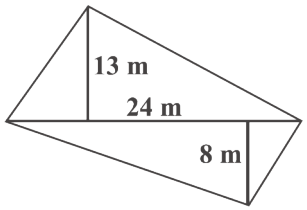


2. एकस्य समलम्बस्य क्षेत्रफलं $34cm^2$ अस्ति तथा अस्य औन्नत्यं 4cm अस्ति । समान्तर-भुजेषु एकस्य 10cm औन्नत्यम् अस्ति। द्वितीयसमान्तर-भुजस्य औन्नत्यं जानन्तु।



3. समलम्बाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य ABCD इत्यस्यपरिकरस्य औन्नत्यं 120m अस्ति। यदि BC = 48m, CD = 17m, तथा AD = 40m अस्ति तर्हि अस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। AB भुजः समान्तुरभजेषु AD तथा BC इत्यस्मिन् लम्बः अस्ति।

4. चतुर्भुजाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य विकर्णः 24m अस्तितथा अवशिष्टशीर्षैः अस्मिन् विकर्णे रचितौ लम्बौ 8m एवं 13m स्तः । क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।

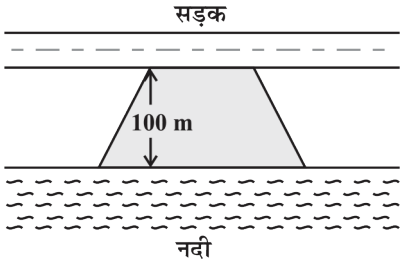


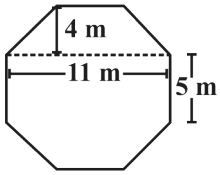
5. कस्यापि समचतुर्भुजस्य विकर्णः 7.5 cm तथा 12cm अस्ति । अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।

6. एकस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्य भुजः 5cm तथा शीर्षलम्बः 4.8cm अस्ति । यदि एकस्य विकर्णस्य औन्नत्यं 8cm अस्ति तर्हि द्वितीयविकर्णस्य औन्नत्यं जानन्तु।

7. कस्यापि भवनस्य तले समचतुर्भुजस्य आकारयुक्ताः 3000 स्निग्धप्रस्तराः सन्ति तथा एतेषु प्रत्येकं विकर्णः 45cm तथा 30cm इति औन्नत्ययुक्तः अस्ति । 4 रुप्यकात्मकं प्रति वर्गमीटरइत्यस्य परिमाणेन अस्य स्निग्धप्रस्तरस्य परिष्कारस्य व्ययं जानन्तु।

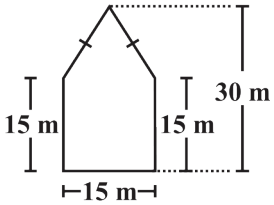
8. मोहनः एकं समलम्बाकारं क्षेत्रं क्रेतुम् इच्छति। अस्य क्षेत्रस्य नद्या सह युक्तः भुजः मार्गेण साकं यः भुजः अस्ति तस्य समान्तरः अस्ति तथा औन्नत्ये द्विगुणं वर्तते यदि अस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं 10,500 m^2 अस्ति तथा द्वयोः समान्तरभुजयोः मध्यस्था एका लम्बायमाना दूरी 100m इत्यस्य अस्ति , तर्हि नद्या सह यः भुजः वर्तते तस्य औन्नत्यं जानन्तु।

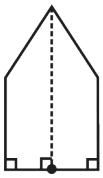




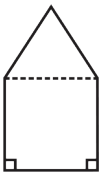
9. एकस्य उन्नतमञ्चस्य उपरितनः पृष्ठः अष्टभुजाकारः अस्ति । यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति । अष्टभुजपृष्ठस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।

10. एकं पञ्चभुजाकारम् उद्यानम् अस्ति यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। अस्य क्षेत्रफलस्य ज्ञानार्थं ज्योतिः कविता च एतं विभिन्नरीत्या विभजति। उभयविधरीतीनाम् उपयोगं कुर्वन्तः अस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। किं भवन्तः अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं कमपि अन्यं विधिं ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति ?



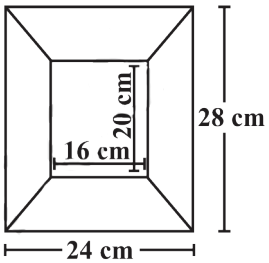


ज्योत्याः आरेखः



कविताया: आरेखः

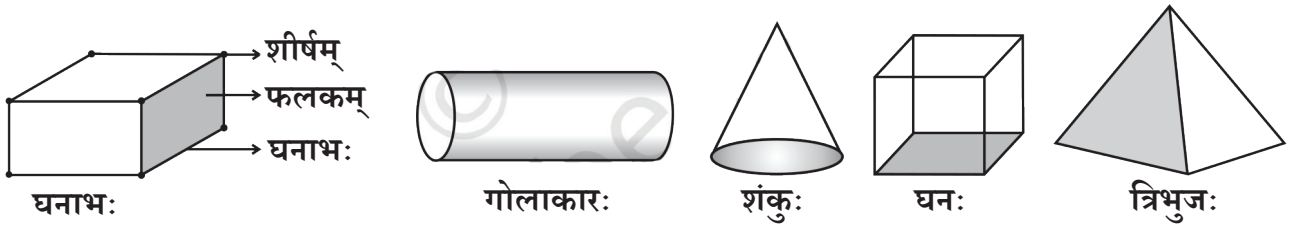
11. संलग्न-चित्रस्य आवारक-आरेखस्य बहिस्तनः आकारः अन्तः आकारश्च 24cm×28cm तथा 16cm×20cm अस्ति। यदि आवारकस्य प्रत्येकं खण्डस्य वैशाल्यं समानम् अस्ति तर्हि प्रत्येकं खण्डस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



11.6 सघनः आकारः

भवन्तः स्वपूर्वकक्ष्यायाम् अध्ययनं कृतवन्तः यत् द्विविमीय-आकृतीन् त्रिविमीय-आकाराणां फलकरूपे परिचेतुं शक्नुवन्ति। इदानीं पर्यन्तं वयं येषां सघनानाम् अध्ययनं कृतवन्तः तेषु ध्यानं ददतु (आकृतिः 11.24)।

ध्यानं ददतु यत् केषुचित् आकारेषु द्वे अथवा द्विसंख्यातः अधिकं (सर्वाङ्गसमं) फलकम् अस्ति। तेभ्यः संज्ञां ददतु। केषु सघनेषु सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति ?



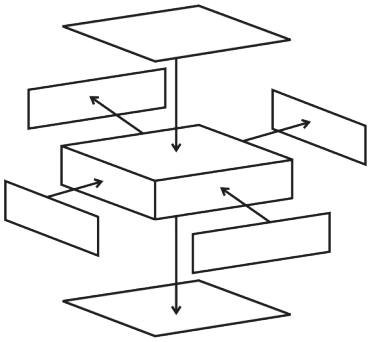
आकृतिः 11.24

एतत् कुर्वन्तु

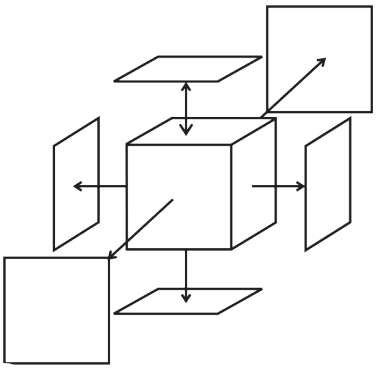
फेनकं, क्रीडनकं, दन्तफेनकम्, अल्पाहारः इत्यादिकं प्रायः घनाभकार-मञ्जूषासु, घनाकार-मञ्जूषासु अथवा गोलाकारः मञ्जूषासु पिहितम् आगच्छति। एतादृशीं मञ्जूषाम् एकत्री कुर्वन्तु (आकृतिः 11.25)।

आकृतिः 11.25

घनाभकारामञ्जूषा

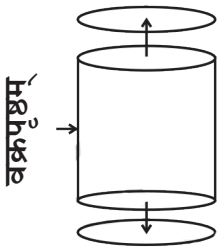


घनाकारामञ्जूषा



सर्वाणि षड् फलकानि आयताकाराणि सन्ति तथा सम्मुखफलकं सर्वाङ्ग-समम् अस्ति । अत एव घनाभेसर्वाङ्गसम-फलकानां युग्मत्रयं भवति।

गोलाकारमञ्जूषा

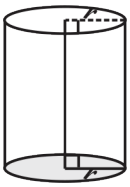


वक्रपृष्ठम्

वृत्ताकाराधारः शीर्षञ्च सर्वाङ्ग-समम् स्तः ।

एकं वक्रपृष्ठम् अथ द्वे वृत्ताकारफलके यत् सर्वाङ्गसमे स्तः ।

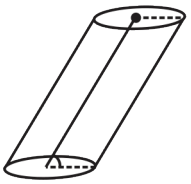
सर्वाणि षड्फलकानि वर्गाकाराणि सन्ति तथा सर्वाङ्गसमानि सन्ति ।



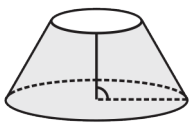
आकृतिः 11.26 (एषः एकः लम्ब-गोलाकारः अस्ति ।)

साम्प्रतम् एकस्मिन् समये एकप्रकारिकां मञ्जूषां गृह्णन्तु । अस्याः सर्वाणि फलकानि कर्तयन्तु । प्रत्येकं फलकस्य आकारं पश्यन्तु तथा समानफलकं परस्परम् उपरि संस्थाप्य मञ्जूषायां फलकानां संख्यां जानन्तु। स्वकीय प्रेक्षणानि लिखन्तु।

किं भवन्तः निम्नलिखिते ध्यानं दत्तवन्तः गोलाकारस्य सर्वाङ्गसम-वृत्ताकार-फलकं परस्परं समान्तरम् अस्ति (आकृतिः 11.26) । ध्यानं ददतु यत् वृत्ताकारफलकानां मध्यबिन्दुं मेलनार्थं रेखाखण्डाधारे लम्बः अस्ति । एतादृशः गोलाकारः लम्बवृत्तीय-गोलाकारः उच्यते । वयं केवलम् एतादृश-गोलाकाराणाम् एव अध्ययनं करिष्यामः, यद्यपि द्वितीयप्रकारकाः गोलाकाराः अपि भवन्ति (आकृतिः 11.27)।



आकृतिः 11.27 (एषः एकः लम्बवृत्तीय-गोलाकारः नास्ति ।)

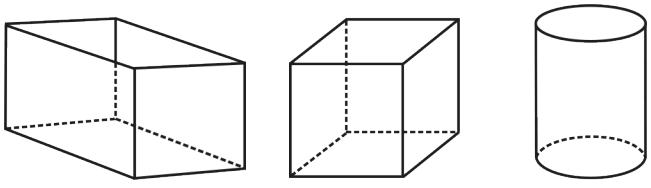


विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितं सघनं गोलाकारकथनं कथम् असमीचीनम् अस्ति ?

11.7 घनः, घनाभः तथा गोलाकारस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम्

इमरानः, मोनिका तथा जसपालः क्रमशः समान-उच्च घनाभाकारां घनाकाराम् अथ गोलाकारां मञ्जूषां चित्रयति।



आकृतिः 11.28

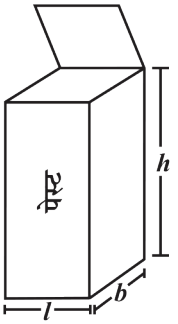
ते एतत् ज्ञातुं प्रयतन्ते यत् कः कियत् अधिकं क्षेत्रफलं चित्रितवन्तः हरितवर्णः तान् ज्ञापयति यत् प्रत्येकं मञ्जूषायाः पृष्ठीय-क्षेत्रफलं ज्ञातुं तेषां साहाय्यं करिष्यति ।

आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं ज्ञातुं प्रत्येकं फलकस्य क्षेत्रफलं जानन्तु तथा एतस्य योगं कुर्वन्तु । कस्यापि सघनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं तस्य फलकानां क्षेत्रफलानां योगरूपं भवति तथा अधिकं स्पष्टाय वयं प्रत्येकम् आकारम् एकैकशः गृह्णामः ।

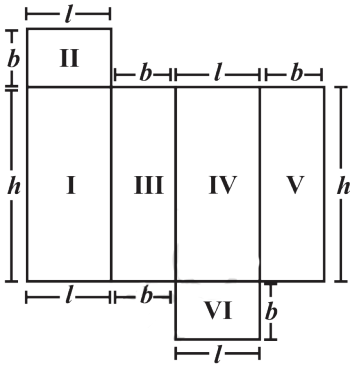
11.7.1 घनाभः

स्वीकुर्वन्तु भवन्तः एकां घनाभाकारां मञ्जूषां (आकृतिः 11.29) कर्तयित्वा उद्घाट्य च समतले विस्तारयन्ति (आकृतिः 11.30) वयम् एकं जालं प्राप्नुमः ।

प्रत्येकं भुजस्य आकारं लिखन्तु । भवन्तः जानन्ति यत् सर्वाङ्गसम-फलकानां युग्मत्रयं भवति । प्रत्येकं फलकस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवन्तः कीदृक् व्यञ्जकम् उपयोगं कर्तुम् अर्हन्ति ?



आकृतिः 11.29



आकृतिः 11.30

मञ्जूषायाः सर्वेषां फलकानाम् आहत्य क्षेत्रफलं जानन्तु । वयं पश्यामः यत् घनाभस्य आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् = क्षेत्रफलम् I +क्षेत्रफलम् II + क्षेत्रफलम् III + क्षेत्रफलम् IV + क्षेत्रफलम् V + क्षेत्रफलम् VI

$= h\times l+b\times l+b\times h+l\times h+b\times h+l\times b$

अत एव आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=2\ (h\times l+b\times h+b\times l)=2\ (lb+bh+hl)$ येषु h,l तथाb क्रमशः घनाभस्य औन्नत्यं, लम्बकम् अथ वैशाल्यम् अस्ति ।

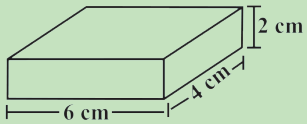
यदि उपर्युक्त-प्रदर्शित-मञ्जूषायाः औन्नत्यं , लम्बकम् अथ वैशाल्यं क्रमशः 20 cm, 15 cm तथा 10 cm अस्ति तर्हि आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् = 2 (20 ×15 +20×10 + 10 ×15)

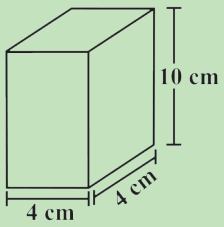
$= 2\ (300+200+150)=1300 m^2$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनाभानाम् (आकृतिः 11.31)

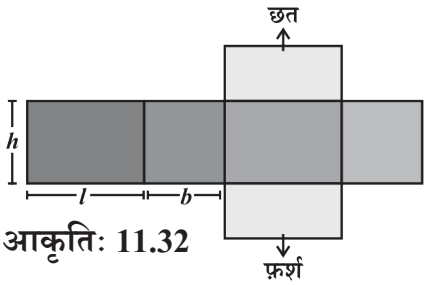
आहत्यपृष्ठीयक्षेत्रफलंजानन्तु।





आकृतिः 11.31

- घनाभस्य भित्तिः (तलस्य शीर्षस्य च अतिरिक्तं फलकम्) पार्श्वपृष्ठम् अपि क्षेत्रफलं प्रददाति । उदाहरणतः यस्मिन् घनाभाकारे प्रकोष्ठे भवन्तः उपविष्टाः सन्ति तस्य प्रकोष्ठस्य चतसृणां भित्तीनाम् आहत्य क्षेत्रफलं प्रकोष्ठस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अस्ति (आकृतिः 11.32) । अतः घनाभस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं अथवा एतेन प्राप्तुं शक्यते । $2(h\times l+b\times h)=2h(l+b)$



आकृतिः 11.32

एतत् कुर्वन्तु

(i) एकः घनाभाकारः मार्जकः (यं भवताम् अध्यापकः कक्ष्यायाम् उपयोगं कुर्वन्ति) इत्यस्य पार्श्व-पृष्ठं धूसरवर्णस्य कर्गदपट्टिकया एवं रीत्या आच्छादयन्तु यत् एतत् मार्जक-पृष्ठस्य चतुर्दिक्षु सम्यक्तया संयुक्तं भवेत् । कर्गदम् अपसारयन्तु । कर्गदस्य क्षेत्रफलं मापयन्तु । किम् एतत् मार्जकस्य पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम् अस्ति ?

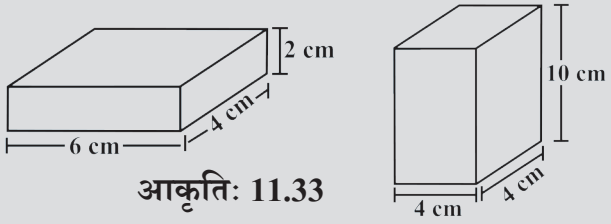
(ii) स्वकीय कक्ष्यायाः प्रकोष्ठस्य लम्बकम् , औन्नत्यं तथा वैशाल्यं मापयन्तु तथा निम्नलिखितं जानन्तु ।

(a) गवाक्षाणां कपाटानाञ्च क्षेत्रफलं हित्वा प्रकोष्ठस्य सम्पूर्णं पृष्ठीय क्षेत्रफलम् ।

(b) अस्य प्रकोष्ठस्य पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम् ।

(c) स्वच्छायमानस्य प्रकोष्ठस्य आहत्य क्षेत्रफलम् ।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु



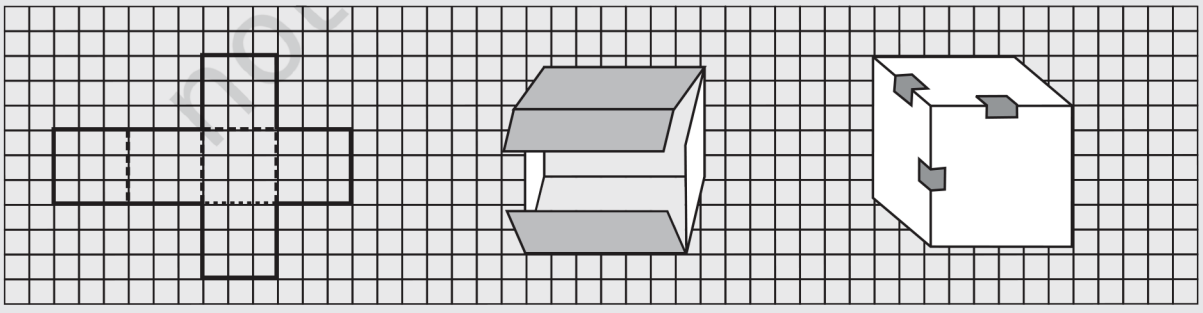
आकृतिः 11.33

1. किम् अहं कथयितुं शक्नुमः यत् घनाभस्य आहत्य पृष्ठीय क्षेत्रफलम् = पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम् अस्ति + 2 ×आधारस्य क्षेत्रफलम् ?
2. यदि वयं काचित् घनाभ आकृतेः (11.33(i)) उन्नतांशं तथा आधारस्य दीर्घतां परस्परं परिवर्त्य एकां भिन्नं घनाभ आकृतिं (11.33(ii)) प्राप्नुमः, चेत् पार्श्वं पृष्ठीयं च क्षेत्रफलं परिवर्तते ?

11.7.2 घन

एतत् कुर्वन्तु

अधोदत्तं पत्रं वर्गी-पत्रे चित्र-लेखनं कृत्वा कर्तनं करोतु (आकृतिः 11.34 (i)) । भवान् जानाति यत् एषः प्रतिरूपः घनस्य पूर्णः अस्ति इति । तत् रेखानाम् अनुदिशि पुटीकरोतु (11.34 (ii) तथा धाराः योज्यन्ते चेत् घनस्य निर्माणं भवति (आकृतिः 11.34 (iii))



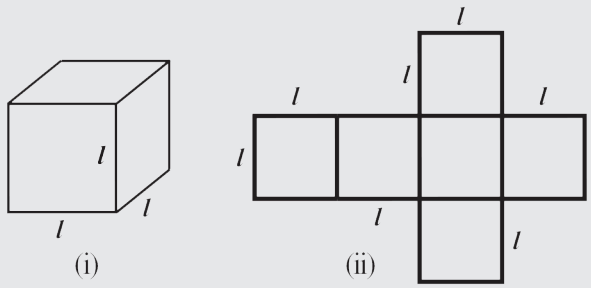
(i) (ii) (iii)

आकृतिः 11.34

(a) घनस्य दीर्घता, विशालता औन्नत्यं च किम् ? घनस्य सर्वाणि मुखानि वर्गाकाराणि एव इति पश्यन्तु। अनेन दीर्घता, विशालता, औन्नत्यं च समानम् इति ज्ञायते (आकृतिः 11.35(i)

(b) प्रत्येकं मुखस्य क्षेत्रफलं लिखतु। तानि क्षेत्रफलानि समानानि वा ?

(c) अस्य घनस्य पृष्टीय-क्षेत्रफलं लिखतु।

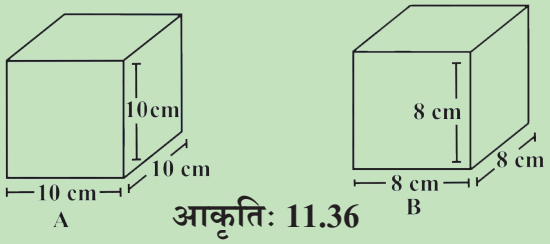


आकृतिः 11.35

(d) यदि घनस्य एकैकः भुजः l अस्ति, तर्हि प्रत्येकस्य मुखस्य क्षेत्रफलं किम् ?(आकृतिः 11.35(ii)। l इति भुजयुक्तस्य घनस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं $6l^2$ इति वक्तुं शक्यते वा ?

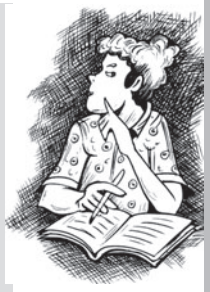
प्रयत्नं कुर्वन्तु

A इति घनस्यपृष्ठीय-क्षेत्रफलं तथा B इति घनस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.36)।

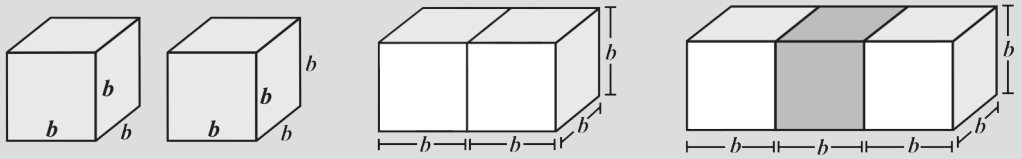


आकृतिः 11.36

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु



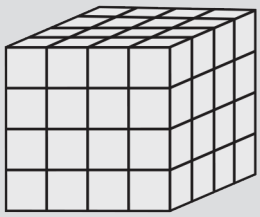
(i) b इति भुजयुक्तं घनद्वयं सम्मेल्य एकः घनाभः निर्मितः (आकृतिः 11.37)। अस्य घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं किम् अस्ति ? किम् इदम् $12b^2$ अस्ति ? किम् एतादृशं घनत्रयं सम्मेल्य निर्मितस्य घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं $18b^2$ अस्ति ? कथम् ?



आकृतिः 11.37

(ii) न्यूनतम-पृष्ठीय-क्षेत्रफलस्य घनाभं निर्मातुं समानभुजीय 12 घनान् कथं व्यवस्थितं करिष्यन्ति ?

(iii) कस्यापि घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफले रङ्गदानस्य पश्चात् तं घनं समानविमायुक्तं 64 घनेषु कर्तयितुं शक्नुवन्ति (आकृतिः 11.38)। एतेषु कतिनां घनानां कमपि फलकं रङ्गान्वितं नाभवन् ? कति घनानां 1 फलकं रङ्गान्वितं जातम् ? कति घनानां 2 फलकं रङ्गान्वितं जातम् ? कति घनानां 3 फलकं रङ्गान्वितं जातम् ?



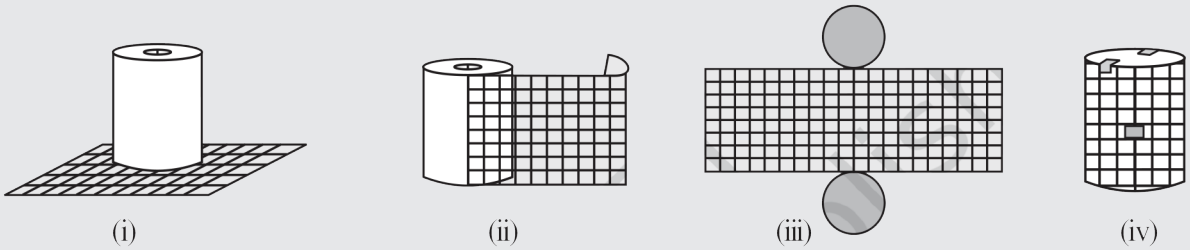
आकृतिः 11.38

11.7.3 गोलकः

यावन्तं गोलकं वयं पश्यामः तेषु अधिकतरं लम्बवृत्तीयगोलकः अस्ति। उदाहरणतः एका मञ्जूषा, गोलस्तम्भः, विद्युद्दण्डः, जलस्य एका प्रणालिका इत्यादिः।

एतत् कुर्वन्तु

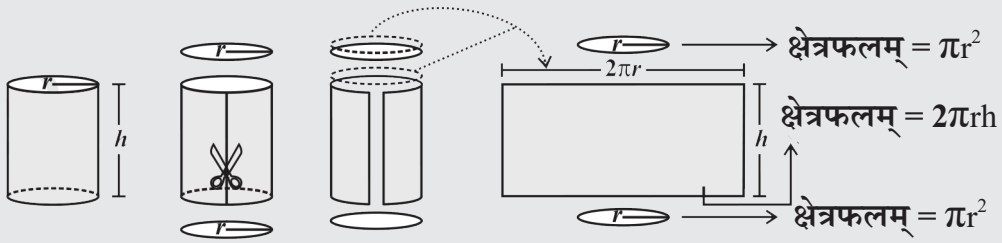
(i) एकां गोलाकारकूपीम् अथवा मञ्जूषां गृह्णन्तु तथा अस्य आधारस्य रचितं कर्गदं रचयन्तु तथा एतं कर्तयित्वा बहिः निष्कासयन्तु (आकृतिः 11.39 (i))। एकम् एतादृशं रचितकर्गदं गृह्णन्तु यस्य वैशाल्यं गोलाकारकूप्याः औन्नत्यस्य समानं स्यात्। एतां पट्टिकां गोलाकारकूपीं परितः ईदृशं वेष्टयन्तु यस्मात् गोलाकारकूप्याः चतुर्दिक्षु समीचीनरूपेण भवेत् (अतिरिक्तं कर्गदं अपसारयन्तु) (आकृतिः 11.39 (ii)) खण्डं परस्परं सम्मेल्य टेप-इति माध्यमेन वेष्टयन्तु (आकृतिः 11.39 (iii)) यस्मात् गोलाकारः निर्मितः स्यात् (आकृतिः 11.39(iv)) गोलाकारकूपीं परितः आवेष्टितस्य कर्गदस्य आकारः कः।



आकृतिः 11.37

निःसन्देहः एतत् आकारे आयताकारः अस्ति। यदा भवन्तः अस्य गोलाकारस्य प्रान्तभागं परस्परं सम्मेल्य टेप-इति संयोजयन्ति तदा आयताकारिकायाः पट्टिकायाः लम्बकं वृत्तस्य परिधेः समानम् अस्ति। वृत्ताकार-आधारस्य त्रिज्या (r) तथा आयताकारपट्टिकायाः लम्बकं (l) एवम् औन्नत्यं (h)इति लिखन्तु। $2\pi r$ = पट्टिकायाः लम्बकम् ?परीक्षयन्तु यत् किम् आयताकार-पट्टिकायाः क्षेत्रफलं $2\pi rh$ अस्ति ? गणयन्तु यत् वर्गाङ्कितकर्गदस्य कति वर्गः एकं गोलाकारं निर्मातुं उपयुक्तः। परीक्षयन्तु यत् किं एषा गणना $2\pi r(r+h)$ इति मानस्य प्रायः समाना अस्ति।

(ii) वयं गोलाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलरूपे सम्बन्धस्य $2\pi r(r+h)$ निगमनम् अपरेण विधिना अपि कर्तुं शक्नुवन्ति। यथा निम्नलिखित-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति तथैव एकं गोलाकारं कर्तयितुं कल्पयन्तु (आकृतिः 11.40)



आकृतिः 11.40

विशेषः- यावत् किञ्चित् कथितं न स्यात् वयं π इत्यस्य मानं $\frac{22}{7}$ गृह्णामः।

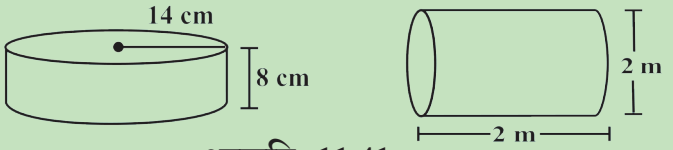
अत एव गोलाकारस्य पार्श्व-पृष्ठीयं (वक्र-पृष्ठीयम्) क्षेत्रफलं $2\pi rh$ अस्ति।

गोलाकारस्य आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् = $r^2+2\pi rh+\pi r^2$

= $2\pi r^2+2\pi rh$ अथवा $2\pi r\ (r+h)$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-गोलाकाराणाम् आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.41)

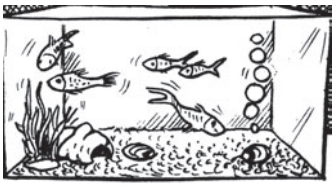


आकृतिः 11.41

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

विशेषरूपेण लिखन्तु यत् कस्यापि वेलनाकारस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं (वक्रपृष्ठीय-क्षेत्रफलम्, आधारस्य परिधिः × वेलनाकारस्य औन्नत्यसमा भवति।) किं वयं घनाभस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं आधारस्य परिमापनं × घनाभस्य औन्नत्यरूपे लेखितुं शक्नुमः ?

उदाहरणम् 4 एकं मत्स्यगृहं घनाभस्य आकाररूपेण अस्ति यस्य बाह्यमापनं 80 cm × 30 cm × 40 cm अस्ति। अस्य तलं, पृष्ठभागयुक्तं फलकं तथा पार्श्वफलकं वर्णयुक्त-कर्गदेन आच्छादनं भवेत्। आवश्यक-कर्गदस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



समाधानम्

मत्स्यगृहस्य लम्बकम् =l=80cm

मत्स्यगृहस्य वैशाल्यम् =b=30cm

मत्स्यगृहस्य औन्नत्यम् =h=40cm

आधारस्य क्षेत्रफलम् =l×b=80×30=2400cm^2

पृष्ठभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम् =b×h=30×40=1200cm^2

पार्श्वभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम् =l×h=80×40=3200cm^2

वाञ्छितक्षेत्रफलम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् , पार्श्वभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम्
+ (2×पृष्ठभागीयफलकस्यक्षेत्रफलम्)

= 2400+3200+(2 ×1200)=8000cm^2

अतः वाञ्छित-वर्णयुक्त-कर्गदस्य क्षेत्रफलम् 8000cm^2 अस्ति।

उदाहरणम् 5 एकस्य घनाभाकार-कक्षस्य आन्तरिकमापनं 12 m × 8 m × 4 m अस्ति। यदि वर्णीकरणस्य मूल्यं 5 रुप्यकं प्रतिवर्गमीटरम् अस्ति तर्हि तस्य प्रकोष्ठस्य चतसृषु भित्तिषु वर्णीकरस्य व्ययं जानन्तु। यदि तस्य प्रकोष्ठस्य छदिभागे अपि वर्णीकरणं भवेत् तदा वर्णीकरणस्य मूल्यं किं भविष्यति ?

समाधानम्

स्वीकुर्वन्तु प्रकोष्ठस्य लम्बकम् =l=12 m

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यम् =b=8 m प्रकोष्ठस्य औन्नत्यम् =h=4 m

प्रकोष्ठस्य चतसृणां भित्तीनां क्षेत्रफलम् = आधारस्य परिमापनम् × प्रकोष्ठस्य औन्नत्यम्

= 2(l+b)×h=2(12+8) × 4

= 2×20×4=160m^2

वर्णीकरणस्य प्रतिवर्गमीटरं व्ययः = 5 रुप्यकम्

अत एव प्रकोष्ठस्य चतसृषु भित्तिषु वर्णीकरणस्य आहत्य व्ययः =160×5=800 रु.

छद्याः क्षेत्रफलम् =12×8=96m^2 छद्याः व्ययः = (96 × 5 =480)

छद्यां वर्णीकरणस्य सम्पूर्णः व्ययः =800+480=रु.1280

उदाहरणम् 6 एकस्मिन् भवने 24 वेलनाकार-स्तम्भाः सन्ति । प्रत्येकं स्तम्भस्य त्रिज्या 28 सेण्टीमीटरम् अस्ति तथा औन्नत्यं 4 मीटरम् अस्ति । 8 रुप्यकं प्रतिवर्गमीटरस्य परिमाणेन समेषां स्तम्भानां वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफले वर्णीकरणस्य व्ययं जानन्तु ।

समाधानम् बेलनाकारस्य स्तम्भस्य त्रिज्या, r=28 cm=0.28 m

औन्नत्यम् h=4 m

बेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $2=\pi rh$

स्तम्भस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=2\times\frac{22}{7}\times0.28\times4=7.04\ m^2$

एतादृशं 24 स्तम्भानां वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=7.04\times24=168.96m^2$

1 m^2 इत्यस्मिन् वर्णीकरणस्य व्ययः =8 रुप्यकम् ।

अतः 168.96 m^2 इति परिमिते क्षेत्रफले वर्णीकरणस्य व्ययः $=168.96\times8=$रु.1351.68

उदाहरणम् 7 एकम् एतादृशस्य बेलनाकारस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य त्रिज्या 7cm तथा सम्पूर्णं पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 968cm^2 अस्ति ।

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु बेलनाकारस्य औन्नत्यम् = h,त्रिज्या =r=7cm

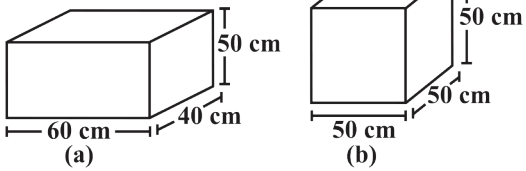
सम्पूर्णं पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=2\pi r\ (h+r)$

अर्थात् $2\times\frac{22}{7}\times7\times(7+h)=968$ अथवा h=15cm

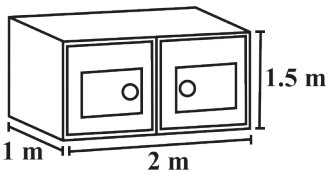
अतः बेलनाकारस्य औन्नत्यम् 15 cm अस्ति ।

प्रश्नावली 11.3

1. द्वे घनाभाकारयुक्ते मञ्जूषे स्तः यथा संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति । कां मञ्जूषां निर्मातुम् अल्पसामग्रीणाम् आवश्यकता अस्ति ?

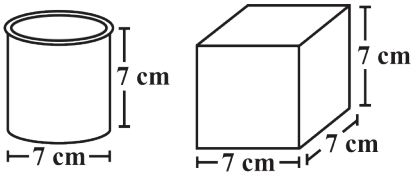


2. 80cm × 48cm × 24cm मापयुक्ताम् एकां मञ्जूषाम् आच्छादकवस्त्रेण आच्छादनं करणीयम् । एतादृशं 100 मञ्जूषाम् आच्छादितुं 96cm वैशाल्ययुक्तं कतिमीटरपरिमितम् आच्छादन-वस्त्रस्य आवश्यकता अस्ति ?



3. एकम् एतादृशस्य घनस्य भुजं जानन्तु यस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 600cm^2 अस्ति ।
4. रूखसारः 1 m × 2 m × 1.5 m इति मापयुक्ताम् एकां पेटिकां बहितः रञ्जितवती यदि सा मञ्जूषायाः तलम् अतिरिच्य तां सर्वतः रञ्जितवती तर्हि जानन्तु यत् सा कति पृष्ठीय-क्षेत्रफलं रञ्जितवती ।
5. डैनियलः एकम् एतादृशस्य घनाभाकारस्य प्रकोष्ठस्य भित्तिं तथा छदिं रञ्जयति यस्य लम्बकं, वैशाल्यं तथा औन्नत्यं क्रमशः 15 m, 10 m तथा 7 m अस्ति । वर्णीकरणस्य प्रत्येकं कैन इत्यस्य सहायतया 100m^2 क्षेत्रफलं रक्तुं शक्यते तदा तस्मै प्रकोष्ठाय वर्णस्य कति कैन इत्यस्य आवश्यकता भविष्यति ?

6. वर्णयन्तुयत्दक्षभागेप्रदत्ताःआकृतयःकथंसमानाःसन्तितथाकथंपरस्परंभिन्नाः? कस्याः मञ्जूषायाः पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ?

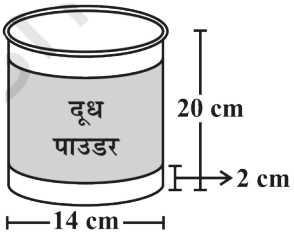


7. 7mत्रिज्यातथा 3 m इति औन्नत्ययुक्तम् एकं पिहितं बेलनाकारं टैङ्क इति कस्यापि धातोः एकेन पटेन निर्मितम् अस्ति । तत् निर्मातुं वाञ्छित-धातोः पटस्य मात्रां जानन्तु ।

8. एकस्य रिक्तबेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं $4224cm^2$ अस्ति। एतम् एतस्य औन्नत्यस्य अनुदिशं कर्तयित्वा 33cm वैशाल्यस्यएकम् आयताकारकम् एकं पटं निर्माति आयताकार-पटस्य परिमापनं जानन्तु ।

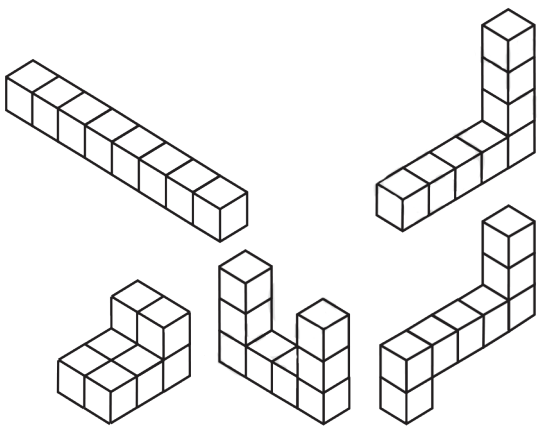
9. कमपि मार्गं समतलं कर्तुम् एकं मार्गरोलरयन्त्रं मार्गस्य उपरि एकबारं भ्रमितुं 750 बारं भ्रमणं कर्तुं भवति यदि मार्गरोलरयन्त्रस्य व्यासः 84cm तथा लम्बकं 1 m अस्ति तर्हि मार्गस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

10. एकम् उद्योगगृहं स्वकीयं दुग्धचूर्णम् एतादृश-बेलनाकार-पात्रेषु संरक्षति यस्य व्यासः 14 cm तथा औन्नत्यं 20 cm अस्ति। उद्योगगृहं पात्रस्य पृष्ठभागे चतुर्दिक्षु एकं वर्णयुक्तं चिह्नं संयोजयति (यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति) यदि एतत् वर्णयुक्तं चिह्नं पात्रस्य तलात् शीर्षाच्च उभयपक्षतः 2 cm इत्यस्य दूरे संयोजयति चेत् वर्णयुक्तचिह्नस्य क्षेत्रफलं किम् अस्ति ?



11.8 घनः, घनाभः तथा बेलनाकारस्य आयतनम्

एकेन त्रिविमी-वस्तुना आवृत्तं स्थलं तस्य आयतनम् उच्यते । स्वं परितः वस्तूनाम् आयतनस्य तोलनं कर्तुं प्रयतन्ताम् । उदाहरणतः कस्यापि प्रकोष्ठस्य अन्तःस्थितामञ्जूषापेक्षया प्रकोष्ठस्य आयतनम् अधिकम् अस्ति । एवमेव भवतां अङ्कनी-मञ्जूषायाः आयतनम् अस्य अन्तः स्थापिता लेखनी तथा मार्जकस्य आयतनात् अधिकम् अस्ति । किं भवन्तः एतेषु कस्य अपि वस्तुनः आयतनं मापितुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 11.41

स्मरन्तु वयं कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं वर्ग-एककस्य उपयोगं कुर्मः । अत्र वयं कठोरस्य आयतनं ज्ञातुं घन-एककस्य उपयोगं करिष्यामः यतो हि घनः सर्वाधिकः सुविधायुक्तः सघनाकारः अस्ति । (तथैव यथा कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं मापितुं वर्गः सर्वाधिकः सुविधाजनकः आकारः अस्ति) ।

क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं क्षेत्रं वर्ग-एककेषु विभाजितं कुर्मः तद्वदेव कस्यापि कठोर-पदार्थस्य आयतनं ज्ञातुं वयं तं कठोर-पदार्थं घन-एककेषु विभजितुम् आवश्यकता अस्ति । विचारयन्तु यत् निम्नलिखित-कठोर-पदार्थेषु प्रत्येकं आयतनं 8 घनः एककः अस्ति (आकृतिः 11.42) ।

एवं रीत्या वयं कथयितुं शक्नुमः यत् कस्यापि कठोरस्य आयतनं मापितुं वयं तस्मिन् स्थितं घन-एककान् गणयामः ।

1 घनः सेण्टीमीटरम् $=1cm\times1cm\times1cm=1cm^3$

$=10mm\times10mm\times10mm=\ldots\ldots\ldots mm^3$

1 घनः मीटरम् $=1\ m\times1\ m\times1\ m=1m^3$

$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots cm^3$

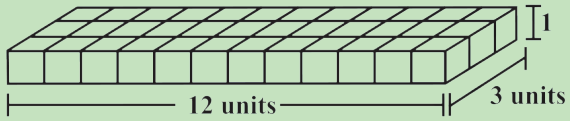
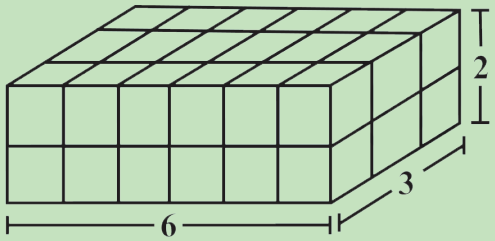
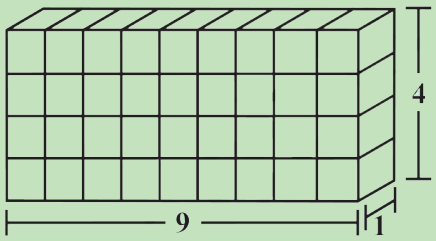
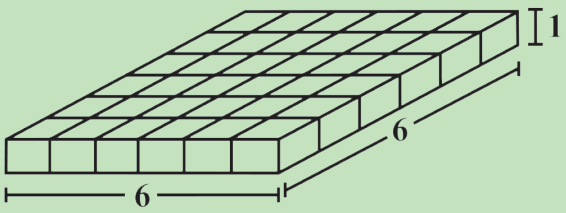
1 घनः मिलीमीटरम् $=1mm\times1mm\times1mm=1mm^3$

$=0.1cm\times0.1cm\times0.1cm=\ldots\ldots\ldots\ldots cm^3$

अधुना वयं घनाभस्य , घनस्य अथ बेलनाकारस्य आयतनं ज्ञातुं किञ्चित् व्यञ्जकसूत्रं जानीमः । आगच्छन्तु प्रत्येकं कठोरपदार्थे क्रमशः चर्चां कुर्मः ।

11.8.1 घनाभः

समानाकारयुक्तः (प्रत्येकं घनस्य लम्बकं समानम्) 36 घनं गृह्णन्तु एकं घनाभं निर्मातुं तान् व्यवस्थितं कुर्वन्तु । भवन्तः एतान् विभिन्नरूपेषु व्यवस्थितुं शक्नुमः । निम्नलिखितसारण्यां विचारं कुर्वन्तु तथा रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

	घनाभः	लम्बकम्	वैशाल्यम्	औन्नत्यम्	l×b×h=V
(i)		12	3	1	12 × 3 × 1 = 36
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

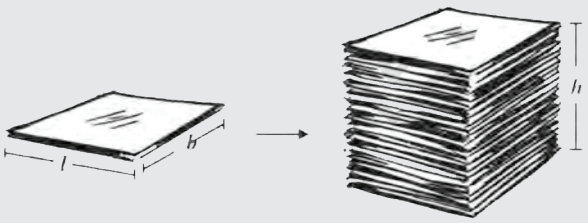
भवन्तः किं पश्यन्ति कुर्वन्ति च ?

यतो हि एतान् घनाभान् निर्मातुं वयं 36 घनानाम् उपयोगं कृतवन्तः अत एव प्रत्येकं घनाभस्य आयतनं 36 घनः एककः अस्ति । एतदतिरिच्य प्रत्येकं घनाभस्य आयतनं तस्य लम्बकस्य, वैशाल्यस्य तथा औन्नत्यस्य गुणनफलम् इव अस्ति । उपर्युक्त-उदाहरणेन वयं कथयितुम् अर्हामः यत् घनाभस्य आयतनं = $l \times b \times h$ अस्ति । यतो हि $l \times b$ इति आधारस्य क्षेत्रफलम् अस्ति अत एव वयम् एतत् अपि कथयितुं शक्नुमः यत् घनाभस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम् ।

एतत् कुर्वन्तु

एकस्य कर्गदस्य पत्रं स्वीकुर्वन्तु तथा अस्य क्षेत्रफलस्य मापनं कुर्वन्तु । तद्वदेव समानाकारकं कर्गदस्य पत्राणां समूहं निर्माय एकं घनाभं निर्मापयन्तु (आकृतिः 11.43) । एतस्य समूहस्य औन्नत्यं मापयन्तु । कर्गदपत्राणां क्षेत्रफलं तथा तस्य औन्नत्यस्य गुणनफलं ज्ञातं कुर्वन्तः घनाभस्य आयतनं जानन्तु ।

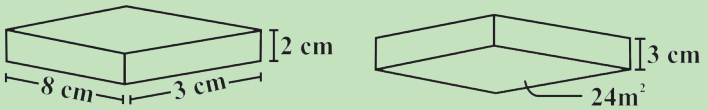
अयं क्रियाकलापः एतत् विचारं प्रदर्शयति यत् कठोर-आयतनस्य निगमनम् अनेन विधिना अपि कर्तुं शक्यते (यदि कस्यापि कठोरस्य आधारः तथा शीर्षं सर्वाङ्गसमम् अस्ति तथा परस्परं समान्तरम् अस्ति तथा अस्य प्रान्तभागः आधारोपरि लम्बः अस्ति) किं भवन्तः एतादृशां वस्तूनां विषये विचारितुं शक्नुवन्ति यस्य आयतनम् अस्य विधेः उपयोगं कृत्वा ज्ञातुं शक्यते ?



आकृतिः 11.43

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनाभानां (आकृतिः 11.44) आयतनं जानन्तु -



आकृतिः 11.44

11.8.2 घनः

घनस्य, घनाभस्य एकम् अद्भुतम् उदाहरणम् अस्ति यस्मिन् $=l=b=h$.अतः घनस्य आयतनम् $=l \times l \times l = l^3$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनानाम् आयतनं जानन्तु

(a) 4 cm भुजयुक्तः (b) 1.5 cm भुजयुक्तः

एतत् कुर्वन्तु

समान-आकारयुक्तान् 64 घनान् भवन्तः यावत् रूपेषु व्यवस्थितं कर्तुं शक्नुवन्ति तावत् रूपेषु व्यवस्थितं कुर्वन्तः घनाभं निर्मापयन्तु । प्रत्येकं रूपस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु । किं समान-आयतनयुक्तानां सघन-आकृतीनां पृष्ठीय-क्षेत्रफलं समानं भवति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

एकम् उद्योगगृहं पिष्टकं विक्रीणाति । पिष्टकं सुरक्षितुं घनाभाकारान्वितानां मञ्जूषाणाम् उपयोगः भवति । मञ्जूषा A → 3cm × 8cm × 20cm, B → 4cm × 12cm × 10cm मञ्जूषायाः कः

आकारः उद्योगगृहाय आर्थिकदृष्ट्या लाभदायकः भविष्यति ? कथम् ? किं भवन्तः एतादृशम् एव कस्यचित् अन्याकारस्य मञ्जूषाविषये विचारं दातुं शक्नुवन्ति यस्य आयतनम् एतत् सदृशं भवेत् परन्तु एतस्य तोलनायाम् आर्थिकदृष्ट्या इतोऽपि अधिकः लाभदायकः भवेत् ।

11.8.3 बेलनाकारः

वयं जानीमः यत् घनाभस्य आयतनं तस्य आधारस्य क्षेत्रफलस्य तथा औन्नत्यस्य गुणनफलं जानन्तः ज्ञातुं शक्नुमः । किम् एवमेव वयं बेलनाकारस्य आयतनं ज्ञातुं शक्नुमः ? घनाभस्य सदृशं बेलनाकारे अपि एकः आधारः एकं शीर्षञ्च भवति यत् परस्परं सर्वाङ्गसमं समान्तरञ्च भवतः । घनाभस्य सदृशम् अस्य वक्रपृष्ठम् आधारस्य उपरि लम्बं भवति ।

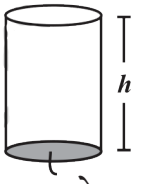
घनाभः बेलनाकारः

अत एव घनाभस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

$= l=b=h=lbh$

बेलनाकारस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$



आधारस्य क्षेत्रफलं $(=\pi r^2)$

11.9 आयतनं धारिता च

एतयोः द्वयोः शब्दयोः अधिकः भेदः नास्ति ।

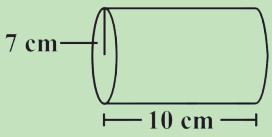
(a) केनापि वस्तुना आवृत्त-स्थलस्य मात्रा तस्य आयतनम् उच्यते ।

(b) कस्मिन्नपि पात्रे पूरितस्य वस्तुनः मात्रा तस्य धारिता इति उच्यते ।

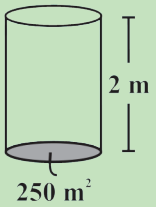
प्रयत्नं कुर्वन्तु

संलग्न-बेलनाकाराणाम् आयतनं जानन्तु

(i)



(ii)



विशेषः - यदि कस्यापि जलसंरक्षणार्थं प्रयुज्यमाने लौहतनुपात्रे (टिनपात्रे) $100cm^3$ अस्ति । धारितां लीटरमध्ये अपि मापितुं शक्नुवन्ति । लीटरमापकं तथा cm^3 इत्यस्मिन् निम्नलिखितः सम्बन्धः अस्ति । $1mL=1\ cm^3$, $1\ L = 1000\ cm^3$. अतः $1\ m^3=1000000cm^3=1000\ L$.

उदाहरणम् 8 एकम् एतादृशस्य घनाभस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आयतनं $275cm^3$ तथा आधारस्य क्षेत्रफलं $25cm^2$ अस्ति ।

समाधानम् घनाभस्य आयतनम् = × औन्नत्यम्

अतः घनाभस्य औन्नत्यम् $= \frac{\text{घनाभस्यक्षेत्रफलम्}}{\text{आधारस्य क्षेत्रफलम्}} = \frac{275}{25} = 11cm$

एवं रीत्या घनाभस्य औन्नत्यं 11 cm अस्ति ।

उदाहरणम् 9 एकः घनाभाकारः भाण्डागारः यस्य मापनं 60 m ×40 m × 30 m अस्ति । अस्य अन्तः कति घनाभाकारयुक्तां मञ्जूषां संरक्षितुं शक्नुमः यदि एकस्याः मञ्जूषायाः $0.8मी^3$ आयतनम् अस्ति ?

समाधानम् एकस्याः मञ्जूषायाः आयतनम् = $0.8\ मी^3$

भाण्डागारस्य आयतनम् = $60 \times 40 \times 30 = 72000मी^3$

भाण्डागारस्य अन्तः संरक्ष्यमाणानां मञ्जूषाणां संख्या = $\frac{\text{भाण्डागारस्यआयतनम्}}{\text{1 मञ्जूषायाःआयतनम्}}$

$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$

इत्थं भाण्डागारस्य अन्तः संरक्ष्यमाणानां मञ्जूषाणां संख्या 90,000 अस्ति।

उदाहरणम् 10 14 cm वैशाल्ययुक्त-आयताकारं कर्गदं तस्य वैशाल्यस्य अनुदिशं पुटीकृत्य 20 cm त्रिज्यायुक्तम् एकं बेलनाकारं निर्मातुं शक्नुवन्ति। बेलनाकारस्य आयतनं जानन्तु (आकृतिः 11.45)। (π इत्यस्य कृते $\frac{22}{7}$ गृह्णन्तु)

समाधानम् कर्गदस्य वैशाल्यस्य अनुदिशं पुटीकृत्य बेलनाकारस्य निर्माणम् अभवत् अत एव कर्गदस्य वैशाल्यं बेलनाकारस्य औन्नत्यं भविष्यति तथा बेलनाकारस्य त्रिज्या 20 cm भविष्यति।

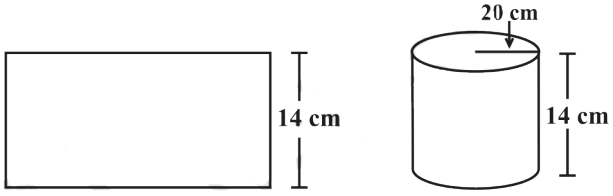
बेलनाकारस्य औन्नत्यम् = h=14cm

त्रिज्या = r=20cm

बेलनाकारस्य आयतनम् =V=π r^2 h

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 cm^3$

अतः बेलनाकारस्य आयतनम् $17600 cm^3$ अस्ति।



आकृतिः 11.45

उदाहरणम् 11 11 cm × 4 cm मापयुक्तस्य आयताकारकर्गदस्य खण्डम् अतिव्यापनं विनैव पुटीकृत्य एकस्य 4 cm औन्नत्ययुक्त-बेलनाकारस्य निर्माणं भवति। बेलनाकारस्य आयतनं जानन्तु।

समाधानम् कर्गदस्य लम्बकं बेलनाकार-आधारस्य परिधिः भवति तथा वैशाल्यम् औन्नत्यं भवति।

स्वीकुर्वन्तु यत् बेलनाकारस्य त्रिज्या = r तथा औन्नत्यं = h

बेलनाकार-आधारस्य परिधिः = $2\pi r=11$

अथवा $2 \times \frac{22}{7} \times r=11$

अत एव $r = \frac{7}{4}$ cm

बेलनाकारस्य आयतनम् =V=πr^2 h

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4\ cm^3 = 38.5 cm^3$

अतः बेलनाकारस्य आयतनम् $38.5 cm^3$ अस्ति।

प्रश्नावली 11.4

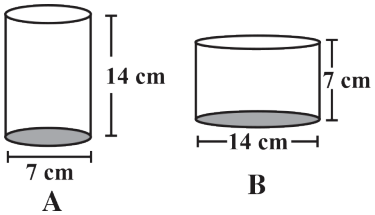
1. भवते एकं बेलनाकारं टैंक इति प्रदत्तम् अस्ति। निम्नलिखितेषु कस्यां परिस्थत्यां भवन्तः तस्य पृष्ठीय क्षेत्रफलं ज्ञास्यन्ति तथा कस्यां स्थित्याम् आयतनम्।

(a) एतत् ज्ञातुं यत् अस्मिन् कियत् जलं संरक्षितुं शक्यते।

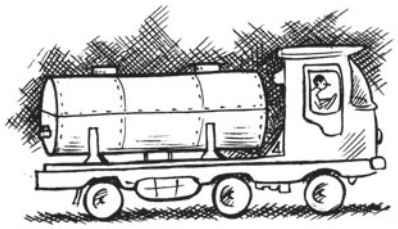
(b) अस्य सम्यक्-करणार्थं वाञ्छित-पाषाणचूर्ण-स्यूतानां संख्या।

(c) अस्मिन् पूरितजलेन पूर्यमाणं लघु-टैंकयानानां संख्या।

2. बेलनाकारस्य A इत्यस्य व्यासः 7 cm तथा औन्नत्यं 14 cm अस्ति। बेलनाकारस्य B इत्यस्य व्यासः 14 cm तथा औन्नत्यं 7 cm अस्ति। परिकलनं विनैव किं भवन्तः ज्ञापितुं शक्नुवन्ति यत् एतयोः कस्य आयतनम् अधिकम् अस्ति। द्वयोः बेलनाकारयोः आयतनं जानन्तः अस्य सत्यापनं कुर्वन्तु। परीक्षयन्तु यत् किम् अधिक-आयतनयुक्तं बेलनाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अपि अधिकम् अस्ति।



3. एकम् एतादृशस्य घनाभस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आधारस्य क्षेत्रफलं $180cm^2$ तथा यस्य आयतनं $900cm^3$ अस्ति ?

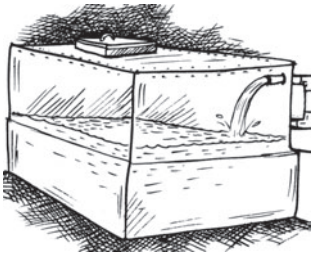


4. एकस्य घनाभस्य विमाः 60 cm×54 cm×30 cm सन्ति ।अस्य घनाभस्य अन्तः 6 cm भुजयुक्तः कति घनं स्थापितुं शक्नुवन्ति।

5. एकस्य एतादृशस्य बेलनाकारस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आयतनं 1.54 m^3 तथा यस्य आधारस्य व्यासः 140cm अस्ति।

6. एकं दुग्धस्य टैंक इति बेलनाकारः अस्ति यस्य त्रिज्या 1.5 m अस्ति तथा लम्बकं 7 m अस्ति। अस्मिन् टैंक मध्ये पूर्यमाणस्य दुग्धस्य मात्रा लीटरमापके जानन्तु।

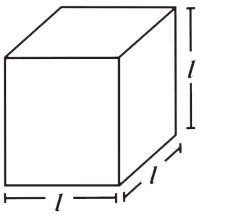
7. यदि कस्यापि घनस्य प्रत्येकं प्रान्तभागं द्विगुणितं भवेत् तदा
(i) अस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफले कियत् गुणिता वृद्धिः भविष्यति ?
(ii) अस्य आयतने कियत् गुणिता वृद्धिः भविष्यति ?

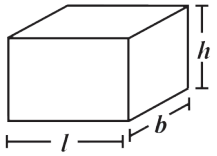


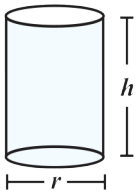
8. एकस्य कुण्डस्य अन्तः 60 लीटरपरिमितं प्रति मिनटं जलं निपतति। यदि कुण्डस्य आयतनं 180 m^3 अस्ति तर्हि जानन्तु यत् एतं कुण्डं पूरयितुं कति घण्टाः लगिष्यन्ति।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. समलम्बस्य क्षेत्रफलम्
   समलम्बस्य क्षेत्रफलम् = समान्तरभुजानां लम्बकानां योगस्य अर्धम् × तेषां मध्यस्य लम्बवत् दूरी।
   समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = विकर्णानां गुणनफलस्य अर्धम्
2. एकस्य सघनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं तस्य फलक-क्षेत्रफलानां योगः इव भवति।
3. घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् =2 (lb+bh+hl)
   घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम्$6l^2$
   बेलनाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् =$2\pi r$ (r+h)
4. कस्यापि सघनेन वस्तुना आवृत्त-स्थलस्य मात्रा तस्य आयतनम् उच्यते।
5. घनाभस्य आयतनम् =l×b×h
   घनस्य आयतनम् =l^3
   बेलनाकारस्य आयतनम् =$\pi r^2 h$
6. (i) 1 cm^3=1 mL
   (ii) 1L=1000cm^3
   (iii) 1m^3=1000000cm^3=1000L







अध्यायः 12

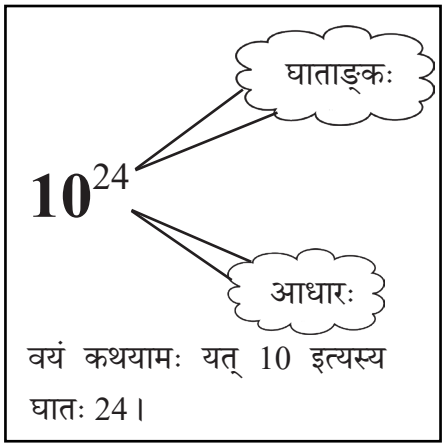
घातांकः घातश्च

12.1 भूमिका

किं भवन्तः जानन्ति ?

पृथिव्याः द्रव्यमानं 5,970,000,000,000,000,000,000,000 किलो. परिमितम् अस्ति । वयं गतकक्ष्यासु पूर्वम् एव पठितवन्तः यत् एतादृशीं बृहत् संख्यां (अत्यन्त-सौविध्यार्थम्) लेखनार्थं कथं घाताङ्कानाम् उपयोगः क्रियते यथा 5.97×10^{24} किलोग्रामपरिमितम् ।

वयं 10^{24} इति 10 इत्यस्य घातः 24 इति पठामः ।



वयं कथयामः यत् 10 इत्यस्य घातः 24 ।

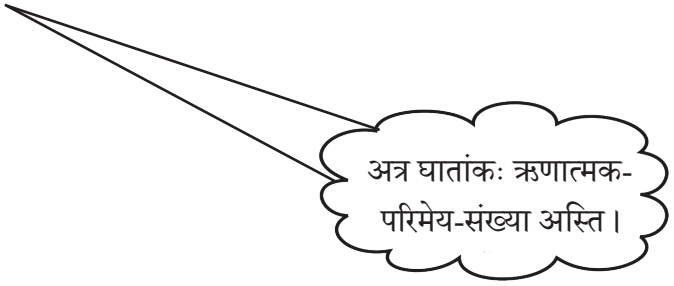
वयं जानीमः $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2$

तथा $2^m = 2\times2\times2\times2\ldots\times2\times2$ (m बारम्)

2^{-2} कस्य समानम् अस्ति इति वयं जानीयाम ?

12.2 ऋणात्मक-घाताङ्कानां घातः

भवन्तः जानन्ति यत् $10^2 = 10\times10 = 100$

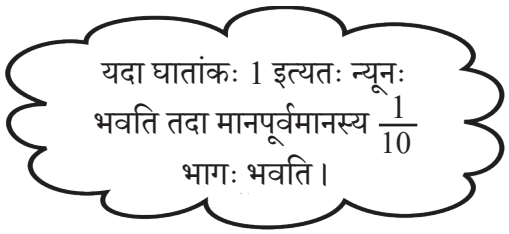


$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$

$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$

$10^{-1} = ?$

उपरितनं प्रतिरूपम् अग्रे सारयन्तः



वयं प्राप्नुमः $10^{-1} = \frac{1}{10}$

एवमेव $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ ।

10^{-10} कस्य समानः अस्ति ?

निम्नलिखितान् जानन्तु।

$3^3=3\times3\times3=27$

$3^2=3\times3=9=\frac{27}{3}$

$3^1=3=\frac{9}{3}$

$3^0=1=\frac{3}{3}$

संख्या 3 आधारेण विभाजिता।

एवं प्रकारेण उपरोक्त-प्रतिरूपं दृष्ट्वा वयं कथयामः

$$3^{-1}=1\div3=\frac{1}{3}$$

$$3^{-2}=\frac{1}{3}\div3=\frac{1}{3\times3}=\frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3}=\frac{1}{3^2}\div3=\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^3}$$

एवमेव 2^{-2} इत्यनेन भवन्तः पुनः प्राप्तुं शक्नुवन्ति।

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}$ अथवा $10^2=\frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3}=\frac{1}{10^3}$ अथवा $10^3=\frac{1}{10^{-3}}$

$3^{-2}=\frac{1}{3^2}$ अथवा $3^2=\frac{1}{3^2}$ इत्यादिः।

साधारणतया वयं कथयितुं शक्नुमः यत् कस्याः अपि शून्येतर-परिमेय-संख्यायाः a, कृते $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, यत्र m एका धनात्मक-परिमेय-संख्या अस्ति। a^{-m}, a^m इत्यस्य गुणात्मकः प्रतिलोमः अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

गुणात्मकं प्रतिलोमं लिखन्तु

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

$10^{-1}=\frac{1}{10}$

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$

वयं शिक्षितवन्तः यत् संख्यां विस्तारित-घाताङ्करूपेण कथं लेखितुं शक्नुमः यथा

$1425=1\times10^2+4\times10^2+2\times10^1+5\times10^0$

साम्प्रतं वयं पश्येम यत् 1425.36 इति विस्तारितरूपेण कथं वक्तुं शक्नुमः।

वयं जानीमः यत् $1425=1\times1000+4\times100+2\times10+5\times1+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$

$=1\times10^3+4\times10^2+2\times10+5\times1+3\times10^{-1}+6\times10^{-2}$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

घाताङ्कानाम् उपयोगं कुर्वन्तः निम्नान् विस्तारितरूपेण लिखन्तु।

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 घाताङ्कस्य नियमः

वयं शिक्षितवन्तः यत् काऽपि शून्येतर-परिमेय-संख्या a इत्यस्याः कृते $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$,
यत्र m तथा n प्राकृतसंख्ये स्तः यदि घाताङ्कः ऋणात्मकः अस्ति तदाऽपि एषः नियमः किं सत्यपूर्णः अस्ति ? अस्माभिः अन्वेषितव्यम्।

वयं जानीमः यत् $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ तथा $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ काचित् शून्येतर-परिमेयसंख्या a इत्यस्य कृते।

अतः $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

-5 इति -3 तथा -2 इति घाताङ्कद्वयोः योगः अस्ति।

$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ इति ग्रहणे सति।

$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$

(-4)+(-3)=-7

$\frac{1}{(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$

अधुना $5^{-2} \times 5^4$ इति लिखन्तु।

(-2)+4=2

$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$

सप्तमी-कक्ष्यायाम् एव भवान् पठितवान् यत् कस्मैचित् a इति अशून्य-पूर्णाङ्काय $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, यत्र m, n तु प्राकृत-सङ्ख्याः तथा m > n.

साम्प्रतं $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ इति जानन्तु।

$(-5)^{-4}) \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^{-2}$

$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(-2)}$

(-4)+2=-2

साधारणतया वयं कथयितुं शक्नुमः यत् कस्याः अपि शून्येतर-परिमेय-संख्यायाः a इत्यस्याः कृते $a^m \times a^n = a^{m+n}$, यत्र m तथा n पुर्णाङ्क-संख्ये स्तः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

घाताङ्क-रूपाणि सरलं कुर्वन्तु तथा लिखन्तु।

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

एवमेव भवन्तः निम्न-घाताङ्कानां नियमान् सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति यत्र a तथा b शून्येतर-परिमेय-संख्ये स्तः तथा m,n कश्चित् पूर्णाङ्कः अस्ति।

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

एतान् नियमान् भवन्तः vii कक्ष्यायां धनात्मक-घाताङ्के अपि शिक्षितवन्तः।

आगच्छन्तु , उपरोक्त-घाताङ्कानाम् उपयोगं कुर्वन्तः केषाञ्चन उदाहरणानां समाधानं कुर्मः।

उदाहरणम् 1 मानं जानन्तु।

2^{-3} (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$

समाधानम्

(i) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}}=3^2=3\times3=9$

उदाहरणम् 2 सरलं कुर्वन्तु

(i) $(-4)^5\times(-4)^{-10}$ (ii) $2^5\div2^{-6}$

समाधानम्

(i) $(-4)^5\times(-4)^{-10}=(-4)^{(5-10)}=(-4)^{-5}=\frac{1}{(-4)^5}$ $(a^m\times a^n=a^{m+n}$ तथा $a^{-m}=\frac{1}{a^m})$

(ii) $2^5\div2^{-6}=2^{5-(-6)}=2^{11}$ $(a^m\div a^n=a^{m-n})$

उदाहरणम् 3 4^{-3} इति घातम् अथ अस्य आधारं 2 इत्यस्य रूपे लिखन्तु।

समाधानम् वयं प्राप्ताः स्मः $4=2\times2=2^2$

अतः $(4)^{-3}=(2\times2)^{-3}=(2^2)^{-3}=2^{2\times(-3)}=2^{-6}$ $[(a^m)^n=a^{mn}]$

उदाहरणम् 4 सरलं कुर्वन्तु अथ उत्तरं घाताङ्क-रूपे लिखन्तु।

(i) $(2^5\div2^8)^5\times2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3}\times(5)^{-3}\times(-5)^{-3}$

(iii) $\frac{1}{8}\times(3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4\times(\frac{5}{3})^4$

समाधानम्

(i) $(2^5\div2^8)^5\times2^{-5}=(2^{5-8})^5\times2^{-5}=(2^{-3})^5\times2^{-5}=2^{-15-5}=2^{-20}=\frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3}\times(5)^{-3}\times(-5)^{-3}=[(-4)\times5\times(-5)]^{-3}=[100]^{-3}=\frac{1}{100^3}$

[नियमेन $a^m\times b^m=(ab)^m$, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$]

$\frac{1}{8}\times(3)^{-3}=\frac{1}{2^3}\times(3)^{-3}=2^{-3}\times3^{-3}=(2\times3)^{-3}=6^{-3}=\frac{1}{6^3}$

$(-3)^4\times\left(\frac{5}{3}\right)^4=(-1\times3)^4\times\frac{5^4}{3^4}=(-1)^4\times3^4\times\frac{5^4}{3^4}$

$=(-1)^4\times5^4=5^4$ $[(-1)^4=1]$

उदाहरणम् 5 m इत्यस्य मानं जानन्तु यतो हि $(-3)^{m+1}\times(-3)^5=(-3)^7$

समाधानम् $(-3)^{m+1}\times(-3)^5=(-3)^7$

$(-3)^{m+1+5}=(-3)^7$

$(-3)^{m+6}=(-3)^7$

उभय पक्षतः घातानाम् आधारः समानः अस्ति यः 1 तथा -1 इत्यस्मात् भिन्नः अस्ति अतः तस्य घाताङ्कः समानः भवितव्यः। अतः $m+6=7$ अथवा $m=7-6=1$

$a^n=1$ यदि $n=0$अस्ति। $a=1$अथवा $a=-1$ एतत् अतिरिच्य कस्य अपि a इत्यस्य कृतेएतत् भविष्यति। $a=1$ इत्यस्य कृते $1^1=1^2=1^3=1^{1-2}=\ldots=1$ अथवा $(1)^n=1$ असीमितं n इत्यस्य कृते $a=-1$ इत्यस्य कृते$(-1)^0=(-1)^2=(-1)=(-1)^{-2}=\ldots=1$अथवा $(-1)^p=1$, p कश्चित् सम-पूर्णाङ्कः।

उदाहरणम् 6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ इत्यस्य मानं जानन्तु।

समाधानम् $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{9}{4}$

$(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = (\frac{3}{2})^2$
अतः साधारणतः, $(\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m$

उदाहरणम् 7 सरलं कुर्वन्तु

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

समाधानम्

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \left\{9-8\right\} \div 16 = \frac{1}{16}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$

प्रश्नावली 12.1

1. मानं जानन्तु :

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. सरलं कुर्वन्तु तथा उत्तरं धनात्मक-घाताङ्करूपे व्यक्ती कुर्वन्तु।

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$

(v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. मानं जानन्तु :

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$

(v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. मानं जानन्तु -(i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. m इत्यस्य मानं जानन्तु यस्य कृते $5^{m} \div 5^{-3} = 5^{5}$

6. मानं जानन्तु - (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. सरलं कुर्वन्तु।

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 घाताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा लघु-संख्याः मानकरूपे व्यक्तीकरणम्।

निम्न-तथ्यान् अवलोकयन्तु।

1. पृथिव्याः सूर्यस्य दूरी 149,600,000,000 मीटर-परिमितम् अस्ति।
2. प्रकाशस्य गतिः 300,000,000 m/s अस्ति।
3. VII कक्ष्यायाः गणितपुस्तकस्य स्थूलता 20mm अस्ति।
4. रक्त-रुधिर-कोशिकानां सामान्यः व्यासः 0.000007mm इति अस्ति।
5. मनुष्यस्य केशस्य स्थूलतायाः परास इति 0.005 सेण्टीमीटरतः 0.01 सेण्टीमीटरम् अस्ति।
6. पृथिव्याः चन्द्रमसः दूरी प्रायः 384,467,000 मीटर-पर्यन्तं भवति।
7. पादपानां कोशिकायाः आकारः 0.00001275 मीटर-पर्यन्तम् अस्ति।
8. सूर्यस्य सामान्य-त्रिज्या 695000 किलोमीटर इति अस्ति।
9. अन्तरिक्षशटले सघन-राकेट-बूस्टर इति प्रेरितुं शटलस्य द्रव्यमानं 503600 किलोग्राम इति भवति।
10. एकस्य कर्गदस्य स्थूलता 0.0016 सेण्टीमीटर इति अस्ति।
11. संगणक-चिप इत्यस्य एकस्याः तन्त्र्याः व्यासः 0.000003 मीटर इति अस्ति।
12. माउण्ट-एवरेस्ट इत्यस्य औन्नत्यं 8848 मीटर इति अस्ति।

अत्र कासाञ्चन संख्यानाम् अवलोकनं कुर्वन्तु यत् वयं पठितुं शक्नुमः यथा 2 सेण्टीमीटर, 8848 मीटर, 6,95,000 किलोमीटर इति। अत्र काचन बृहत् संख्या अपि अस्ति यथा 150,000,000,000 मीटर तथा काचन बहु लघु-संख्याः सन्ति यथा 0.000007 मीटर इति।

बृहत्तमाः संख्याः	लघुत्तमाः संख्याः
150,000,000,000 मीटर	0.000007 मीटर
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

उपरोक्त-तथ्यानाम् आधारे बृहत्तमां लघुत्तमाञ्च संख्यां परिचिन्वन्तु तथा सङ्गत-सारण्यां लिखन्तु।

गतकक्ष्यायां वयं शिक्षितवन्तः यत् काम् अपि लघुत्तमां संख्यां मानकरूपेण कथं व्यक्तीकरणं भवेत्। उदाहरणार्थं $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$। इदानीम् अस्माभिः 0.000007 इति संख्या मानकरूपे व्यक्तीकरणीया।

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^{3}} = 7 \times 10^{6}$$

$$0.000007\text{m} = 7 \times 10^{-6}\text{m}$$

एवमेव एकस्य कर्गदस्य स्थूलता या 0.0016 सेण्टीमीटर इति अस्ति लिखन्तु ।

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3} \text{cm}$$

अतः वयंकथयितुं शक्नुमः यत् कर्गदस्य स्थूलता $=1.6 \times 10^{-3}$cm अस्ति ।

150000000000. दशमलवः 11 स्थानेन
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 वामभागतः अपसरितः ।

0.000007 दशमलवः 6 स्थानेन
1 2 3 4 5 6 दक्षभागतः अपसरितः ।

पुनः ध्यानं ददतु ।
0.0016 दशमलवः 3 स्थानेन
1 2 3 दक्षभागतः अपसरितः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. निम्न-संख्याः मानकरूपेण लिखन्तु ।
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. प्रदत्त-तथ्यान् मानकरूपेण लिखन्तु ।

12.4.1 बृहत्तमसंख्यानां लघुत्तमसंख्यानां तोलनम्

सूर्यस्य व्यासः 1.4×10^9 m तथा पृथिव्याः व्यासः1.2756×10^7 m अस्ति । वयम् एतेषां व्यासानां तोलनं कर्तुम् इच्छामः । सूर्यस्य व्यासः 1.4×10^9 m पृथिव्याः व्यासः 1.2756×10^7 m

अतः $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^9} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ यः प्रायः 100 गुणितम् अस्ति ।

अतः सूर्यस्य व्यासः पृथिव्याः व्यासस्य प्रायः 100 गुणितम् अस्ति । रक्त-रुधिर-कोशिकाः या 0.000007 m इत्यस्य अस्ति तथा पादपानां कोशिकाः याः 0.00001275m परिमापस्य अस्ति एतेषां परिमापानां तोलनं कुर्वन्तु ।

रक्त-रुधिर-कोशिकानाम् आकारः $= 0.000007\text{m} = 7 \times 10^{-6}$ m

पादपानां कोशिकानाम् आकारः $= 0.00001275\text{m} = 1.275 \times 10^{-5}$m

अतः $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 0^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (प्रायः)

अतः रक्त-रुधिर-कोशिकाः आकारे पादपानां कोशिकायाः प्रायः अर्धभागः अस्ति ।

पृथिव्याः द्रव्यमानं 5.97×10^{24} kg तथा चन्द्रमसः द्रव्यमानं 7.35×10^{22} kg अस्ति । उभयोः सम्पूर्णं द्रव्यमानं किं भविष्यति ?

सम्पूर्णं द्रव्यमानम् $= 5.97 \times 10^{24}$ kg $+ 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22} = 604.35 \times 10^{22}$ kg

एतान् नियमान् भवन्तः vii कक्ष्यायां धनात्मक-घाताङ्के अपि शिक्षितवन्तः ।

सूर्यस्य पृथिव्याः च मध्ये दूरी1.496×10^{11} m तथा पृथिवी-चन्द्रमसः मध्ये दूरी 3.84×10^8 m अस्ति । सूर्यग्रहणक्रमे चन्द्रमाः पृथिवी-सूर्ययोः मध्ये आगच्छति । अस्मिन् समये चन्द्र-सूर्ययोः मध्ये कियत् दूरी भविष्यति ?

सूर्यस्य पृथिव्याः च मध्ये दूरी $= 1.496 \times 10^{11}$ m

पृथिवी-चन्द्रमसः मध्ये दूरी $= 3.84 \times 10^8$ m

चन्द्र-सूर्ययोः मध्ये दूरी $= 1.496\times10^{11} - 3.84\times10^{8}$

$= 1.496\times1000\times10^{8} - 3.84\times10^{8}$

$= (1496-3.84)\times10^{8}\ m = 1492.16\times10^{8}\ m$

उदाहरणम् 8 निम्न-संख्यानां मानकरूपे व्याख्यानं कुर्वन्तु।

(i) 0.000035 (ii) 4050000

समाधानम् (i) $0.000035 = 3.5\times10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05\times10^{6}$

उदाहरणम् 9 निम्न-संख्यां सामान्यरूपेण व्यक्तं कुर्वन्तु।

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

समाधानम्

(i) $3.5\times10^{5} = 3.5\times100000 = 352000$

(ii) $7.54\times10^{-4} = \frac{7.54}{10^{-4}} = \frac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3\times10^{-5} = \frac{3}{10^{5}} = \frac{3}{100000} = 0.00003$

एकबारं पुनः अस्माभिः मानकरूपे प्रदत्ताः संख्याः समान-घाताङ्कीय संख्यासु परिवर्तनीयाः।

प्रश्नावली 12.2

1. निम्न-संख्याः मानकरूपे व्यक्तं कुर्वन्तु।

(i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942

(iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837

(v) 31860000000

2. निम्न-संख्याः सामान्यरूपेण व्यक्तं कुर्वन्तु।

(i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}

(iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}

3. निम्नलिखित-कथनेषु या संख्या प्रकटीभवति ताः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(i) 1 माईक्रॉनयन्त्रं $\frac{1}{1000000}$ इत्यस्य समं भवति।

(ii) एकस्य इलेक्ट्रॉनयन्त्रस्य आवेशः 0.000,000,000,000,000,000,16 कुलम्बः भवति।

(iii) जीवाणोः मापनं 0.0000005 m अस्ति।

(iv) पादपानां कोशिकानां परिमापनं 0.00001275 m अस्ति।

(v) स्थूलकर्गदस्य स्थूलता 0.07mm अस्ति।

4. एकस्मिन् चये पञ्च पुस्तकानि सन्ति यस्मिन् प्रत्येकं स्थूलता 20 mm तथा पञ्च कर्गदानां बन्धः अस्ति येषु प्रत्येकं स्थूलता 0.016mm अस्ति। अस्य चयस्य सम्पूर्णां स्थूलतां जानन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. ऋणात्मक-घाताङ्कीय संख्याः निम्न-नियमान् पालयन्ति।

(a) $a^{m}\times a^{n} = a^{m+n}$ (b) $a^{m}\div a^{n} = a^{m-n}$ (c) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

(d) $a^{m}\times b^{m} = (ab)^{m}$ (e) $a^{0} = 1$ (f) $\frac{a^{m}}{b^{m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m}$

2. ऋणात्मक-घाताङ्कानाम् उपयोगं कुर्वन्तः लघुत्तम-संख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुवन्ति।

अध्यायः 13

सरलः प्रतिलोम-समानुपातश्च

13.1 भूमिका

मोहनः स्वयं स्वकीयाय तथा स्व भगिन्यै चायं निर्माति। सः 300 ml जलं , चमसद्वयं शर्करा , एकचमसं चायपत्रं
तथा 50 ml दुग्धस्य उपयोगं करोति यदि सः पञ्च जनानां कृते चायं निर्मीयात् तर्हि तस्य कियन्मात्रं प्रति वस्तुनः आवश्यकता भविष्यति ?

यदि द्वौ विद्यार्थिनौ कस्याः अपि सभायाः कृते आसन्दस्य व्यवस्थाकरणे 20 मिनटस्य समयं लागयतः तर्हि एतत् एव कार्यं कर्तुं 5 विद्यार्थिनः कियत् समयं लागयिष्यन्ति ?

वयं स्वकीयदैनन्दिन जीवने एतादृशीम् अनेकां स्थितिं पश्यामः यत्र एकस्मिन् राशौ परिवर्तने सति अन्यस्मिन् राशौ अपि परिवर्तनं भवति।

उदाहरणार्थम् :

(i) यदि क्रीत-वस्तूनां संख्यायां वृद्धिः भवति तर्हि तस्य सम्पूर्ण-मूल्ये अपि वृद्धिः भवति।

(ii) वित्तकोषे यावत् धनराशिः अधिकरूपेण संगृह्यते तावत् कुसीदः अपि अधिकत्वेन अर्जयिष्यते।

(iii) यदा कस्य अपि वाहनस्य गतौ वृद्धिः भवति तत् द्वारा तावद् एव दूरीं समापयितुं समये न्यूनता आगच्छति।

(iv) एकस्मै प्रदत्तकार्याय यावत् अधिकः जनः कार्ये संयोजयिष्यते तत् कार्यं पूरयितुं तावत् एव समयः न्यूनः लगिष्यति।

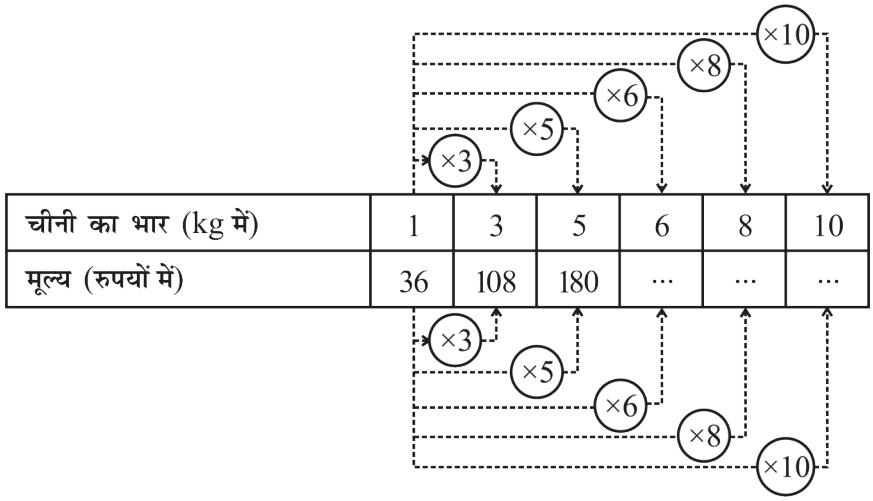
ध्यानं ददतु एकस्मिन् राशौ परिवर्तने सति अन्यस्मिन् राशौ परिवर्तनं भवति। एतादृशीं पञ्चस्थितिम् इतोऽपि लिखन्तु यत्र एकस्मिन् राशौ परिवर्तने सति अन्यस्मिन् राशौ अपि परिवर्तनं भवति।

मोहन द्वारा आवश्यकं प्रत्येकं वस्तुनः मात्रा विषये वयं कथं जानीमः ? अथवा पञ्च विद्यार्थिनां द्वारा कार्यं पूर्णकरणे गृहीतसमयं वयं कथं ज्ञास्यामः ? एतादृशानां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं वयमिदानीं कस्यचित् विचरणस्य अवधारणानाम् अध्ययनं करिष्यामः।

13.2 सरलः समानुपातः

यदि 1 किलोग्रामपरिमितं शर्करायाः मूल्यं 18 रुप्यकम् अस्ति तर्हि 3 किलोग्रामपरिमितं शर्करायाः मूल्यं कियत् भविष्यति ? एतत् 54 रुप्यकम् अस्ति। एवमेव वयं 5 किलोग्रामपरिमितम् अथवा 8 किलोग्रामपरिमितं शर्करायाः मूल्यं ज्ञातुं शक्नुमः।

निम्नलिखित-सारण्याः अध्ययनं कुर्मः -



ध्यानं ददतु यत् यथा - यथा शर्करायाः भारे वृद्धिः भवति तथा - तथा तस्य मूल्ये अपि ईदृक् वृद्धिः भवति यत् तस्य अनुपातः अचरः भवति । एकम् इतोऽपि उदाहरणं गृह्णन्तु। स्वीकुर्वन्तु एकं कारयानं 60 km इत्यस्य दूरीं प्रापयितुं 4 लीटरपरिमितं शिलातैलस्य (पेट्रोल) उपयोगं करोति तर्हि तत् 12 लीटरपरिमिते शिलातैले (पेट्रोल) कियत् दूरीं प्रापयिष्यति ? अस्य उत्तरं 180 km अस्ति। वयम्एतत् कथं परिकलितवन्तः ? यतो हि अन्यस्यां स्थितौ 12 लीटरपरिमितम् अर्थात् 4 लीटरपरिमितस्य त्रिगुणितस्य शिलातैलस्य प्रयोगः भवति अत एव गन्तव्या दूरी अपि 60 km इत्यस्य त्रिगुणितंभविष्यति । अपर शब्देषु यदा शिलातैलस्य उपभोगः त्रिगुणितो भविष्यति तदा गन्तव्या दूरी अपि प्रथमदूरी इत्यस्य त्रिगुणितो भविष्यति। स्वीकुर्वन्तु यत् शिलातैलस्य उपभोगः 4 लीटरपरिमितम् अस्ति तथा आकलिता सङ्गता दूरी y km अस्ति । अधुना निम्नलिखितसारणीं पूरयन्तु।

शिलातैलम् (x) लीटरपरिमितेषु	4	8	12	15	20	25
दूरी (y) km इत्यस्मिन्	60	...	180	...	...	...

वयं प्राप्नुमः यत् यदा x इत्यस्य माने वृद्धिः भवतितदा y इत्यस्य माने अपि एतादृशं वृद्धिः भवति यत् अनुपातः $\frac{x}{y}$ इत्यस्मिन् किमपि परिवर्तनं नागच्छति ।एषः अचरः (स्वीकुर्वन्तु k) तिष्ठति। एतादृश्यां स्थितौ एतत् $\frac{1}{15}$ अस्ति (अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु)।

यदि $\frac{x}{y} = k$ अथवा $x=ky$ स्यात् तर्हि वयं कथयामः यत् x तथा y इत्यस्मिन् सरलः अथवा प्रत्यक्षः समानुपातः अस्ति [अथवा ते अनुक्रमानुपातिनः सन्ति] । अस्मिन् उदाहरणे $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ अस्ति यत्र 4 तथा 12 शिलातैलस्य उपभोगस्य लीटरपरिमाणे मात्राः (x) अस्ति तथा 60 एवं 180 किलोमीटरपरिमाणे दूरी (y) अस्ति । अतः यदा x तथा y इत्यस्मिन् प्रत्यक्षः अथवा साक्षात् अनुपातः भवति तदा वयं $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इति लेखितुं शक्नुमः । [xइत्यस्य x_1, y_2 मानाय y इत्यस्यसङ्गतमानः क्रमशः y_1 , y_2 स्तः।]

शिलातैलस्य उपभोगः तथा एकं कारयानं द्वारा आकलिता दूरी एकस्य प्रत्यक्ष-अनुपातस्य स्थितिः अस्ति । एवमेव व्ययस्य सम्पूर्णः धनराशिः तथा क्रीत-वस्तूनां संख्या अपि प्रत्यक्ष-अनुपातस्य एकम् उदाहरणम् अस्ति । प्रत्यक्ष-अनुपातस्य इतोऽपि उदाहरणानां विषये विचारयन्तु । परीक्षयन्तु यत् किं मोहनः (प्रारम्भिक-उदाहरणे) पञ्च जनानां कृते चायं निर्मातुं 750 ml जलं, पञ्च चमसं परिमितं शर्करा, $2\frac{2}{1}$ चमसं चायपत्रं, 125 ml दुग्धस्य प्रयोगं करिष्यति । आगच्छन्तु निम्नलिखित-क्रियाकलापानां सहायतया प्रत्यक्ष-अनुपातस्य अवधारणां तथा अधिकबोधनस्य प्रयत्नं कुर्वन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

(i) • एकां घटिकां नयन्तु तथा तस्याः मिनटयुक्ता दीर्घा सूचिकां 12 इत्यस्मिन् स्थिरं कुर्वन्तु।

• मिनटस्य सूचिकया स्वकीय प्रारम्भिक-स्थित्या घूर्णितकोणम् एवं गत समयं निम्नलिखित-सारण्याः रूपे लिखन्तु।

व्यतीतः समयः (T) (मिनटेषु)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
भ्रमितः कोणः (A) (डिग्री मध्ये)	(A_1) 90	(A_2) …	(A_3) …	(A_4) …
$\frac{T}{A}$	…	…	…	…

भवन्तः T तथा A विषये किं पश्यन्ति ? किम् एतेषु सहैव वृद्धिः भवति ? किम् $\frac{T}{A}$ प्रत्येकं समये तद्वद् एव भवति ?

किं मिनटस्य सूचिका द्वारा भ्रमितः कोणः व्यतीत-समयस्य अनुक्रमानुपाती अस्ति ? आम् !

उपरोक्त-सारण्या भवन्तः एतत् अपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत्

$T_1:T_2=A_1: A_2$, यतो हि

$T_1:T_2=15: 30=1:2$

$A_1: A_2= 90:180 =1:2$

परीक्षयन्तु यत् $T_2: T_3=A_2: A_3$ तथा $T_3: T_4=A_3: A_4$ अस्ति।

भवन्तः स्वयं स्व-समय-अन्तरालं नीत्वा एतं क्रियाकलापं पुनः आनेतुं शक्नुवन्ति।

स्वकीय मित्रं प्रति निम्नलिखित-सारणीं पूरयितुं कथयन्तु तथा तस्य आयोः एवं तस्य मातुः सङ्गत-आयोःअनुपातं ज्ञातुम् अपि कथयन्तु।

	पञ्च वर्षस्य पूर्वम् आयुः	**वर्तमान-आयुः**	**पञ्च वर्षस्य पश्चात् आयुः**
मित्रस्य आयुः (F)			
मातुः आयुः (M)			
$\frac{F}{M}$			

भवन्तः पश्यन्तु ? किं F अथवा M इत्यस्मिन् सहैव वृद्धिः (अथवा न्यूनता) भवति। किं $\frac{F}{M}$ प्रत्येकं बारं तदेव अस्ति ? नैव। भवन्तः एतं क्रियाकलापं स्व मित्रैः सह आवर्तितुं शक्नुवन्ति तथा स्वकीय प्रेक्षणानि लेखितुं शक्नुवन्ति।

इत्थम् एतत् आवश्यकं नास्ति यत् सहैव वर्धनशीलः व्यकलनशीलः वा चरः सदैव अनुक्रमानुपाती भवेत्। उदाहरणार्थम् -

(i) मानवेषु भौतिकपरिवर्तनं समयेन साकं भवति परन्तु एतत् आवश्यकं नास्ति यत् एते एकस्मिन् पूर्वनिर्धारित-अनुपाते भवेत् ।

(ii) व्यक्तीनां भारे औन्नत्ये च परिवर्तनं कस्मिंश्चिदपि ज्ञात-अनुपाते न भवति ।

(iii) कस्य अपि वृक्षस्य औन्नत्यं तथा तस्य शाखायाम् उत्पत्स्यमानानां पर्णानां संख्यायां साक्षात् सम्बन्धः अथवा अनुपातः न भवति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखित-सारणीं पश्यन्तु तथा जानन्तु यत् किं x तथा y अनुक्रमानुपाती अस्ति ।

(i)

X	20	17	14	11	8	5	2
Y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

X	6	10	14	18	22	26	30
Y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

X	5	8	12	15	18	20
Y	15	24	36	60	72	100

2. मूलधनं = 1000 रूप्यकम्, कुसीदस्य परिमाणम् = 8% वार्षिकरूपेण । निम्नलिखित-सारणीं पूरयन्तु तथा जानन्तु यत् कीदृशः कुसीदः (साधारणः अथवा चक्रवृद्धिः) समय-अवधिना सह प्रत्यक्ष-अनुपाते परिवर्तितः भवति ।

$\frac{p \times r \times t}{100}$

$P(1+\frac{r}{100})^t - p$

समय-अवधिः	1 वर्षम्	2 वर्षम्	3 वर्षम्
साधारणः कुसीदः (रुप्यकेषु)			
चक्रवृद्धिः कुसीदः (रुप्यकेषु)			

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

यदि वयं समय-अवधिं तथा कुसीदस्य परिमाणं स्थिरं रक्षयेम तर्हि साधारणकुसीदः मूलधनेन साकं प्रत्यक्ष-अनुपाते परिवर्तितः भवति । किम् एतादृशः सम्बन्धः चक्रवृद्धिः कुसीदाय अपि भविष्यति ? कथम् ?

आगच्छन्तु , साम्प्रतं किञ्चित् उदाहरणं समाधयामः यत्र वयं प्रत्यक्ष-अनुपातस्य अवधारणायाः प्रयोगं करिष्यामः ।

उदाहरणम् 1 एकस्य विशिष्ट-प्रकारकस्य 5 मीटरपरिमितस्य वस्त्रस्य मूल्यं 210 रुप्यकम् अस्ति । इत्थम् एव 2, 4, 10 तथा 13 मीटरपरिमितानां वस्त्राणां मूल्याय एकां सारणीं निर्मापयन्तु ।

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु यत् वस्त्रस्य लम्बकं x मीटर इति अस्ति तथा तस्य मूल्यं (रुप्यकेषु) y अस्ति ।

X	2	4	5	10	13
Y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

यथा-यथा वस्त्रस्य औन्नत्ये वृद्धिः भवति तस्य मूल्ये अपि तस्मिन् एव अनुपाते वृद्धिः भवति। अतः एतत् एकस्य प्रत्यक्ष-अनुपातस्य स्थितिः अस्ति।

वयं $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इत्थं प्रकारकस्य सम्बन्धस्य उपयोगं कुर्मः।

अत्र $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ तथा $x_2 = 2$ अस्ति।

अतः $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इत्यस्मात् वयं $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ प्राप्नुमः।

अर्थात् $5y_2 = 2 \times 210$ अथवा $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

यदि $x_3 = 4$ तर्हि $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ अथवा $5y_3 = 4 \times 210$ अथवा $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[किम् वयम् अत्र $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ इत्यस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः ? प्रयत्नं कुर्वन्तु।]

यदि $x_4 = 10$ तर्हि $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ अथवा $5 \times y_4 = 10 \times 210$ अथवा $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

यदि $x_5 = 13$ तर्हि $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$ अथवा $5 \times y_5 = 13 \times 210$ अथवा $y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

[ध्यानं ददतु यत् अत्र वयं $\frac{5}{210}$ इत्यस्य स्थाने $\frac{2}{84}$ अथवा $\frac{4}{168}$ अथवा $\frac{10}{420}$ इत्यस्य अपि उपयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति।]

उदाहरणम् 2 14 मीटर इति औन्नत्य-युक्तस्य एकस्य विद्युत् स्तम्भस्य छाया 10 मीटर इति वर्तते। समान-स्थितौ तत् वृक्षस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य छाया 15 मीटर इति अस्ति।

समाधानम् - स्वीकुर्वन्तु यत् वृक्षस्य औन्नत्यं x मीटर इति अस्ति। वयं निम्नप्रदर्शितानुसारम् एकां सारणीं निर्मापयामः।

वस्तुनः औन्नत्यम् (मीटर इत्यस्मिन्)	x	14
छायायाः लम्बकम् (मीटर इत्यस्मिन्)	10	15

ध्यानं ददतु यत् वस्तुनः औन्नत्यं यावत् अधिकं भविष्यति तस्य छायायाः लम्बकं तावत् एव अधिकं भविष्यति। अतः एतत् एकस्य

प्रत्यक्ष-अनुपातस्य स्थितिः अस्ति।

अर्थात् $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इत्यनेन वयं प्राप्नुमः $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ (कथम् ?)

अथवा $\frac{14 \times 15}{10} = x$ अथवा $\frac{14 \times 3}{2} = x$

अतः $x = 21$। इत्थं वृक्षस्य औन्नत्यं 21 मीटर इति अस्ति।

वैकल्पिकरूपेण वयं $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इति $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ इत्यस्मिन् रूपे अपि लेखितुं शक्नुमः।

अतः $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ अथवा $14 : x = 10 : 15$

अतः $10 \times x = 15 \times 14$ अथवा $x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

उदाहरणम् 3 यदि स्थूलकर्गदस्य 12 समूहस्य भारः 40 ग्रामपरिमितम् अस्ति तर्हि एतादृशस्य कर्गदस्य कियत् कर्गदसमूहानां भारः $2\frac{2}{1}$ किलोग्रामपरिमितं भविष्यति ?

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु यत् तेषां कर्गदसमूहानां संख्या x इति अस्ति येषां भारः $2\frac{2}{1}$ किलोग्रामपरिमितम् अस्ति। वयम् उपरोक्त-सूचनां निम्नदर्शितानुसारम् एकस्याः सारण्याः रूपे लिखामः।

कर्गदसमूहानां संख्या	12	X
कर्गदसमूहानां भारः (ग्राम इत्यस्मिन्)	40	2500

1 किलोग्राम इति = 1000 ग्राम इति
$2\frac{2}{1}$ किलोग्राम इति = 2500ग्राम इति

कर्गदसमूहानां संख्या अधिका भविष्यति तर्हि तस्य भारः अपि तावत् एव अधिकः भविष्यति। अतः कर्गदसमूहानां संख्या अथ तस्य भारः परस्परम् अक्रमानुपाती अस्ति।

अतः $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

अथवा $\frac{12 \times 2500}{40} = x$ अथवा $750 = x$

अतः कर्गदसमूहानां वाञ्छित-संख्या 750 अस्ति।

वैकल्पिकविधिः राशिद्वयं x तथा y यत् प्रत्यक्ष-अनुपाते विचरणं करोति $x=ky$ अथवा $\frac{x}{y} = k$ इत्यस्य सम्बन्धः भवति।

अत्र $k = \frac{\text{कर्गदसमूहानांसंख्या}}{\text{ग्रामपरिमाणेकर्गदसमूहानांभारः}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$। अधुना x इति तेषां कर्गदसमूहानां संख्या अस्ति।

यस्य भारः $2\frac{2}{1}$ kg (2500gm) अस्ति।

सम्बन्धः $x=ky$ इत्यस्य उपयोगे सति $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

इत्थं रूपेण कर्गदस्य 750 समूहस्य भारः $2\frac{2}{1}$ किलोग्रामपरिमितं भविष्यति।

उदाहरणम् 4 एकं रेलयानं 75km/h इति समान-गत्या चलत् अस्ति।

(i) तत् यानं 20 मिनटेषु कियत् दूरीपर्यन्तं गमिष्यति ?

(ii) 250 km इति दूरं गन्तुं कियत् समयं लगिष्यति तत् जानन्तु ?

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु यत् 20 मिनटेषु आकलिता दूरी (km इत्यस्मिन्) x अस्ति तथा 250km इति दूरीं प्रापयितुम् उपयुज्यमानः कालः (मिनटेषु) y अस्ति।

1 घण्टा = 60 मिनट इति

आकलिता दूरी (km इत्यस्मिन्)	75	x	250
गृहीतः समयः (मिनटेषु)	60	20	y

यतो हि गतिः एकसमाना अस्ति अत एव आकलिता दूरी गृहीत-समयस्य अनुक्रमानुपातिनी भविष्यति।

(i) वयं प्राप्तवन्तः $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$ अथवा $\frac{75 \times 20}{60}$

अथवा x=25। अतः रेलयानं 20 मिनटेषु 25 km

(ii) परिमितस्य दूरीम् आकलिष्यति।

सहैव $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

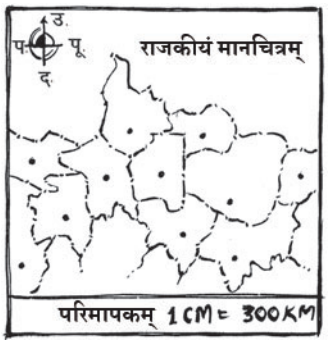
अथवा $y = \frac{75}{60} = \frac{250}{y}$ मिनट इति अर्थात् 3 घण्टा 20 मिनट इति

अतः 250 km इत्यस्य दूरीम् आकलयितुं 3 घण्टा 20 मिनट इत्यस्य समयः लगिष्यति।

वैकल्पिकरूपेण यदा x ज्ञातम् अस्ति तर्हि सम्बन्धः $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ इत्यतः y इति ज्ञातुं शक्नुमः।

भवन्तः जानन्ति यत् एकं मानचित्रम् एकस्य अति बृहत् क्षेत्रस्य लघु निरूपणं भवति। प्रायः मानचित्रस्य सर्वतः नीचस्थ भागे एका मापिका प्रदत्ता भवति। एषा मापिका वास्तविकलम्बके मानचित्रे च निरूपित-लम्बके सम्बन्धं दर्शयति। एवं प्रकारेण मानचित्रस्य मापिका मानचित्रे बिन्दुद्वयस्य दूरी तथा बृहत् क्षेत्रे बिन्दुद्वयस्य वास्तविकदूर्याः अनुपातः भवति। उदाहरणार्थं यदि मानचित्रे 1 cm इत्यस्य वास्तविकदूरी 8 km इति निरूपयति (अर्थात् मापिका 1 cm : 8 km अथवा 1: 800000 अस्ति), तर्हि तस्मिन् एव मानचित्रे 2 cm इत्यस्य वास्तविकदूरीं 16 km इति निरूपयति। अतः वयं कथयितुं शक्नुमः यत् मानचित्रस्य मापिका प्रत्यक्ष-अनुपातस्य अवधारणायाम् आधारिता अस्ति।

उदाहरणम् 5 मानचित्रस्य श्रेणी तु 1:30000000। द्वे नगरे मानचित्रे 4cm मिते दूरे स्तः। तयोः मध्ये विद्यमानं वास्तविकं दूरम् अवगच्छत।



समाधानम् मानचित्रे दूरं तु x cm तथा वास्तविकं दूरं तु y cm, तर्हि

$$1:3000000 = x:y \qquad \frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$$

यतः x = 4, अतः $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

अथवा $y=4\times3\times10^7=12\times10^7$ cm=120Kms

एवं रीत्या मानचित्रे 4 cm इत्यस्य दूरतायुक्त-नगराणां वास्तविक-दूरी 1200 km अस्ति।

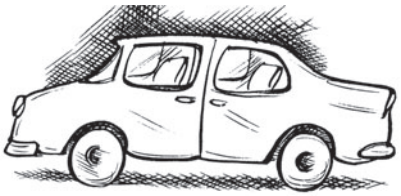
प्रयत्नं कुर्वन्तु

स्वकीय राज्यस्य एकं मानचित्रं गृह्णन्तु। तत्रस्थ प्रयुक्तमापिकां लिखन्तु। मापिकायाः प्रयोगं कुर्वन्तः मानचित्रे कस्यचित् नगरद्वयस्य दूरीं मापयन्तु। एतयोः द्वयोः नगरयोः मध्ये वास्तविकं दूरीं परिकलयन्तु।

प्रश्नावली 13.1

1. एकस्य रेल्वे-स्थानकस्य निकटे कारयानस्थगनस्य शुल्कम् अनेन प्रकारेण अस्ति -

4 घण्टा पर्यन्तम्	60 रुप्यकम्
8 घण्टा पर्यन्तम्	100 रुप्यकम्
12घण्टा पर्यन्तम्	140 रुप्यकम्
24 घण्टा पर्यन्तम्	180 रुप्यकम्

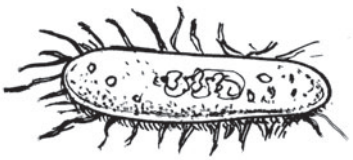


परीक्षयन्तु यत् किं कारयानस्थगनस्य शुल्कं स्थगनसमयस्य प्रत्यक्ष-अनुपाते अस्ति।

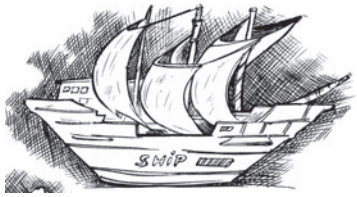
2. एकस्य वर्णस्य मूलमिश्रणस्य 8 भागेषु रक्तपदार्थस्य 1 भागं सम्मेल्य मिश्रणनिर्माणं भवति। निम्नलिखित-सारण्यां मूलमिश्रणस्य तान् भागान् जानन्तु येषां मेलनस्य आवश्यकता अस्ति।

रक्तवर्णीय-पदार्थस्य भागः	1	4	7	12	20
मूलमिश्रणस्य भागः	8	...	...	...	...

3. 2 प्रश्ने यदि रक्तवर्णस्य पदार्थस्य 1 भागाय 75mL मूलमिश्रणस्य आवश्यकता अस्ति। तर्हि मूल मिश्रणस्य 1800 mL इत्यस्मिन् अस्माभिः रक्तवर्णस्य कियान् पदार्थः मेलितव्यः ?



4. कस्मिंश्चित् शीतपेय-निर्माण-कार्यागारे एकं यन्त्रं 6 होरासु 840 कूपीः पूरयति। तत् यन्त्रं 5 घण्टासु कियत् कूपीः पूरयिष्यति।



5. एकः जीवाणुः इत्यस्य चित्रं 50,000 गुणितम् आवर्धिते सति तस्य औन्नत्यं 5 cm इत्यस्य भवति यथा विषाणोः वास्तविकं लम्बकं किम् अस्ति ? यदि चित्रं केवलं 20,000 गुणितम् आवर्धितं भवेत् तर्हि तस्य आवर्धितलम्बकं किं भविष्यति ?

6. एकस्य जलयानस्य प्रारूपे तस्य स्तम्भः 9cm परिमितः औन्नत्यः अस्ति अपरञ्च वास्तविकयानस्य स्तम्भः 12 m परिमितः औन्नत्यः अस्ति यदि यानस्य औन्नत्यः 28 m अस्ति तस्य प्रारूपस्य औन्नत्यं कियत् अस्ति ?

7. स्वीकुर्वन्तु 2 kg शर्करायां 9×10^6 क्रिस्टल-पदार्थः अस्ति। निम्नलिखित-शर्करायां कियत् शर्करायाः क्रिस्टल-पदार्थः भविष्यति ? (i) 5 kg (ii) 1.2 kg

8. रश्मेः पार्श्वे एकस्य मार्गस्य मानचित्रम् अस्ति यस्य मापिकायां 1 cm इत्यस्य दूरी 18 km इति निरूपिता अस्ति। सा तस्मिन् मार्गे स्वकीय यानेन 72 km इत्यस्य दूरीम् आकलयति। तया आकलिता दूरी मानचित्रे का भविष्यति ?

9. 5 m 60cm इति परिमितस्य एकस्य औन्नत्ययुक्तस्य ऊर्ध्वाधर-स्तम्भस्य छायायाः औन्नत्यं 3 m 20 cm अस्ति। तस्मिन् एव समये तत् जानन्तु -

(i) 10 m 50 cm औन्नत्ययुक्तस्य एकस्य अन्य-स्तम्भस्य छायायाः औन्नत्यम्

(ii) तस्य स्तम्भस्य औन्नत्यं यस्य छायायाः औन्नत्यं 5m इति अस्ति।

10. वस्तु-पूरितम् एकं ट्रकयानं 25 मिनटे 14 km चलति यदि गतिः तादृशी एव स्यात् तर्हि तत् यानं 5 घण्टासु कियत् पर्यन्तं गन्तुं पारयिष्यति ?

एतत् कुर्वन्तु

1. एकस्मिन् वर्गाङ्कित-कर्गदे भिन्न-भिन्न भुजानां पञ्च वर्गं रचयन्तु। निम्नलिखित-सूचनाम् एक-सारणी रूपेण लिखन्तु।

	1-वर्गः	**2-वर्गः**	**3-वर्गः**	**4-वर्गः**	**5-वर्गः**
एकस्य भुजस्य औन्नत्यम् (L)					
परिमापनम् (P)					
$\frac{L}{P}$					

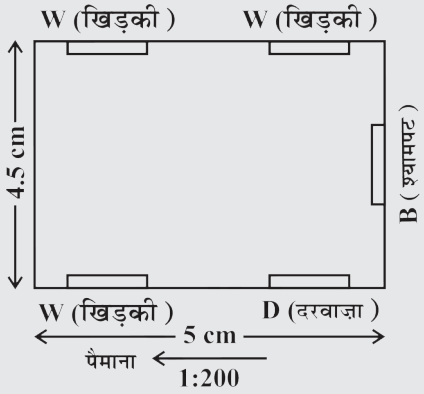
क्षेत्रफलम् (A)					
$\frac{L}{A}$					

जानन्तु यत् भुजस्य औन्नत्यं किम् -

(a) वर्गस्य परिमापनस्य अनुक्रमानुपाती अस्ति। (b) वर्गस्य क्षेत्रफलस्य अनुक्रमानुपाती अस्ति।

2. पञ्चजनानांकृतेसंयावंनिर्मातुंनिम्नलिखितसामग्र्याःआवश्यकता भवति - कणिकः - 250 g, शर्करा - 300 g, घृतम् - 200 g, जलम् - 500 g, समानुपातस्य अवधारणायाः प्रयोगं कुर्वन्तः स्वकीय कक्ष्यायाः कृते संयावं निर्मातुम् एतासां सामग्रीणां मात्रासु भविष्यमाणस्य परिवर्तनस्य आकलनं कुर्वन्तु।

3. एकस्याः मापिकायाः निर्णयं कृत्वा स्वकीय कक्ष्यायाः प्रकोष्ठस्य मानचित्रं रचयन्तु यस्मिन् गवाक्षाः, कपाटाः, श्यामपट्टाः इत्यादयः भवेयुः। (एकम् उदाहरणं प्रदत्तम् अस्ति।)



विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

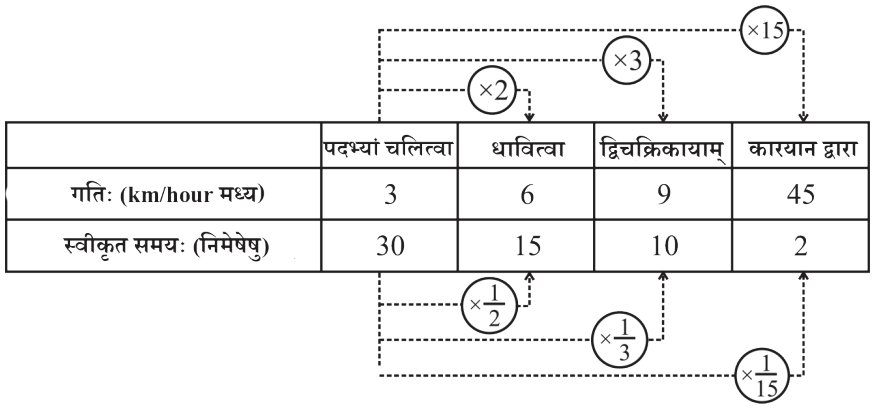
'सरल-समानुपातस्य (विचरणस्य)' इदानीं यावत् समाधितासु समस्यासु काञ्चित् समस्यां गृह्णन्तु। किं भवन्तः विचारयन्ति यत् एतां समस्यां एकक-विधिना अथवा ऐकिक-विधिना समाधातुं शक्यते।

13.3 प्रतिलोम-अनुपातः

राशिद्वयम् एवं प्रकारेण अपि परिवर्तितुं शक्नोति यत् यदि एकस्मिन् राशौ वृद्धिः भवति तर्हि द्वितीय-राशौ न्यूनता भवति तथा एकस्मिन् न्यूनता भवति तर्हि अपरस्मिन् वृद्धिः भवति उदाहरणार्थं यदा एकस्मिन् कार्ये बहवः जनाः योजिताः भवन्ति तस्मिन् कार्ये न्यूनः समयः लगति। एतत् बोधयितुं आगच्छन्तु निम्नस्थितिं पश्यन्तु -

जाहिदा स्व विद्यालयं चतुर्भिः प्रकारैः गन्तुं शक्नोति। सा पादाभ्यां गन्तुं शक्नोति, धावनं कृत्वा गन्तुं शक्नोति, द्विचक्रिका यानेन गन्तुं शक्नोतितथाकारयानेनगन्तुंशक्नोति। संलग्न-सारण्याः अध्ययनं कुर्वन्तु।

ध्यानंददतुयत्यदागतौवृद्धिः भवति तदा समानदूरीमेव आकलितुं योज्यमाने समये न्यूनता आगच्छति। यदा जाहिदा धावित्वा स्व गतिं द्विगुणितं करोति तदा तया गृहीतः समयः $\frac{1}{2}$ भवति।



यदा सा स्वगतिं द्विचक्रिकायाने त्रिगुणितं करोति तदा तया गृहीतः समयः $\frac{1}{3}$ भवति। एवमेव यदा सा स्वकीयां गतिं 15 गुणितं करोति तदा तया गृहीतः समयः $\frac{1}{15}$ भवति। अर्थात् समये भविष्यमाणायाः न्यूनतायाः अनुपातः गतौ भविष्यमाणायाः सङ्गतवृद्धेः अनुपातस्य प्रतिलोमः अस्ति। किं वयं कथयितुं पारयामः यत् गतिः समयश्च व्युत्क्रमानुपाते परिवर्तितो भवतः।

सङ्ख्यायाः गुणन-विलोमः तु तस्य व्युत्क्रमः। अतः $\frac{1}{2}$ तु 2 इत्यस्य विलोमः, तथैव 2 अपि $\frac{1}{2}$ इत्यस्य विलोमः (अत्र अवधानं ददातु यत् $2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2=1$)

आगच्छन्तु एकस्मिन् अन्य-उदाहरणे विचारं कुर्मः। एकः विद्यालयः गणितस्य पाठ्यपुस्तकाय 6000 रुप्यकं व्ययीकर्तुम् इच्छति। 40 रुप्यकं प्रति पुस्तकस्य परिमाणेन कियत् पुस्तकं क्रेतुं शक्यते ? स्पष्टम् अस्ति यत् 150 पुस्तकानि क्रेतुं शक्यते यदि एकस्य पाठ्यपुस्तकस्य मूल्यं 40 रुप्यतः अधिकं स्यात् तर्हि तस्मिन् एव निश्चित-राशौ 150 इत्यतः न्यूनं पुस्तकं क्रेतुं शक्ष्यति। निम्नलिखित-सारणीं पश्यन्तु :

प्रत्येकं पुस्तकस्य मूल्यं (रुप्यकेषु)	40	50	60	75	80	100
क्रीतमानानां पुस्तकानां संख्या	150	120	100	80	75	60

भवन्तः किं पश्यन्ति ? भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् प्रत्येकं पुस्तकस्य मूल्ये वृद्धिः भवति तर्हि एकस्मिन् निश्चितराशौ क्रीतमाणानां पुस्तकानां संख्यायां न्यूनता आगमिष्यति।

यदा पुस्तकस्य मूल्यं 40 रुप्यकतः 50 रुप्यक-पर्यन्तं भवति तर्हि अस्य वृद्धेः अनुपातः 4:5 अस्ति तथा सङ्गत-पुस्तकानां संख्या 150 इत्यतः न्यूनं भूत्वा 120 इति जाते सति अनुपातः 5:4 भवति। अस्य अर्थः अस्ति यत् उभौ अनुपातौ परस्परं प्रतिलोमौ स्तः।

ध्यानं ददतु यत् द्वयोः राश्योः सङ्गतः मानानां गुणनफलम् अचरः अर्थात्

$$40\times150\times=50\times120=6000 \text{ अस्ति।}$$

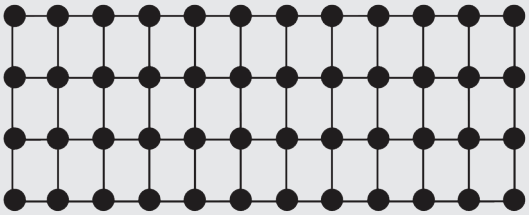
यदि वयं प्रत्येकं पुस्तकस्य मूल्यं (रुप्यकेषु) x तथा क्रीतानां पुस्तकानां संख्याः yइत्यनेन निरूपयन्ति तदा x इत्यस्मिन् वृद्धिः भवति तदा yइत्यस्मिन् न्यूनता भवति तथा विलोमतः एतत् ध्यातव्यं यत् गुणनफलं xy इति अचरः एव तिष्ठति। वयं कथयामः यत् xy इत्यनेन साकं प्रतिलोमरूपेण विचरति। इत्थं प्रकारेण राशिद्वयम् x तथाy प्रतिलोम-समानुपाते विचरितः इति उच्यते यदि तयोः मध्ये xy=k इति प्रकारस्य कश्चित् सम्बन्धः स्यात् यत्र kकश्चित् अचरः अस्ति। यदि x इत्यस्य x_1, x_2 इति मानाय y इत्यस्य सङ्गतमानं क्रमशः y_1, y_2 स्यात् तर्हि $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ (=k),अर्थात् $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ इति भवति।

वयं कथयामः यत् x तथा y प्रतिलोम-अनुपाते स्तः।

अतः उपरोक्त-उदाहरणे एकस्य पुस्तकस्य मूल्यं तथा एकस्मिन् निश्चित-धनराशौ क्रीतमाणानां पुस्तकानां संख्या व्युत्क्रमानुपाती अस्ति। एवमेव एकस्य वाहनस्य गतिः तथा तद्द्वारा एकां निश्चितां दूरीम् आकलने गृहीतः समयः परस्परं प्रतिलोम-अनुपाते परिवर्तितः भवति। एवमेव केषाञ्चन अन्यराशी-युग्म-उदाहरणानां विषये विचारयन्तु यत् प्रतिलोम-अनुपाते परिवर्तितं भवति। साम्प्रतं आसन्दिकादीनां व्यवस्थितुं तस्याः समस्याः विषये ध्यानं दातुं शक्नुवन्ति यां समस्यां वयम् अस्य अध्यायस्य भूमिकायां वर्णितवन्तः। प्रतिलोम-समानुपातम् इतोऽपि सम्यक्तया अवगन्तुम् एकः क्रियाकलापः अत्र प्रदत्तः अस्ति।

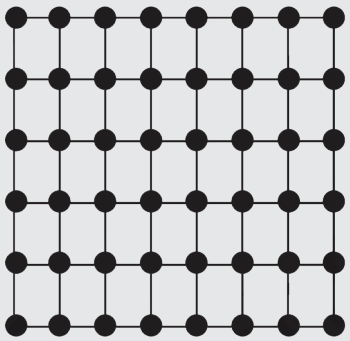
एतत् कुर्वन्तु

एकं वर्गाङ्कितं कर्गदं गृह्णन्तु तथा तस्मिन् 48 कोष्ठकं पङ्क्तीनां विभिन्न-संख्यायां निम्न-दर्शितानुसारं व्यवस्थितं कुर्वन्तु :



4 पङ्क्तयः, 12 स्तम्भाः

पङ्क्तीनां संख्या (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
स्तम्भानां संख्या (C)	(C_1) …	(C_2) …	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) …



6 पङ्क्तयः , 8 स्तम्भाः

भवन्तः किं पश्यन्ति ? यदा R इत्यस्मिन् वृद्धिः भवति तदा C इत्यस्मिन् न्यूनता भवति।

(i) किं $R_1:R_2=C_2:C_1$ अस्ति ? (ii) किं $R_3:R_4=C_4:C_3$ अस्ति ?

(iii) किं R तथा C परस्परं व्युत्क्रमानुपाती अस्ति ?

एतं क्रियाकलापं 36 प्रकोष्ठकेन सह प्रयत्नं कुर्वन्तु।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-सारणीं पश्यन्तु तथा जानन्तु यत् केषां चराणां (अत्र xतथा y) युग्मं परस्परं प्रतिलोम-समानुपाते अस्ति।

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

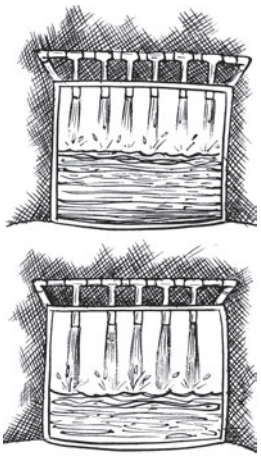
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

आगच्छन्तु केषाञ्चन एतादृशानाम् उदाहरणानाम् उपरि विचारं कुर्मः , यत्र प्रतिलोम-समानुपातस्य अवधारणायाः प्रयोगं कुर्मः ।

यदा राशिद्वयं x तथा y प्रत्यक्षम् अथवा साक्षात् अनुपाते भवति (अर्थात् अनुक्रमानुपाती भवति), तदा एतं $x \alpha y$ एवम् अपि लेख्यते । यदा राशिद्वयं x तथा y प्रतिलोम-समानुपाते (अर्थात् व्युत्क्रमानुपाती) भवति, तदा एतत् $x \alpha \frac{1}{y}$ अपि लेख्यते ।

उदाहरणम् 7 एकं जलभाण्डारं 1 घण्टा 20 मिनटे पूरितुं 6 नलिकानाम् आवश्यकता भवति यदि तेनैव प्रकारेण केवलं 5 नलिकानाम् एव उपयोगः भवेत् तर्हि तत् भाण्डारं कियत् समये पूरयिष्यति ?



समाधानम् स्वीकुर्वन्तु यत् भाण्डारं पूरणस्य वाञ्छित-समयः x मिनट इति अस्ति तदा वयं निम्नलिखितां सारणीं प्राप्नुमः ।

नलिकानां संख्या	6	5
समयः (मिनटेषु)	80	x

नलिकानां संख्या यावत् न्यूना भविष्यति जलभाण्डारं पूरयितुं तावत् एव अधिकः समयः लगिष्यति ।

अतः एषा एका प्रतिलोम-समानुपातस्य स्थितिः अस्ति ।

अतः $80 \times 6 = x \times 5$ $(x_1 y_1 = x_2 y_2)$

अथवा $\frac{80 \times 6}{5} = x$ अथवा $x = 96$

एवं रीत्या भाण्डारं 5 नलिकया 96 मिनट-मध्ये अर्थात् 1 घण्टा 36 मिनटे पूरयिष्यते ।

उदाहरणम् 8 एकस्मिन् छात्रावासे 100 विद्यार्थिनः सन्ति तथा तस्य भोजन-सामग्रीं 20 दिनाय पर्याप्तम् अस्ति यदि अस्मिन् समूहे 25 विद्यार्थिनः इतोऽपि आगच्छेयुः तर्हि भोजन-सामग्री कदा पर्यन्तं चलिष्यति ।

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु यत् भोजन-सामग्री 125 विद्यार्थिनां कृते y दिनपर्यन्तं चलिष्यति ।वयं निम्नलिखित-सारणीं प्राप्नुमः :

विद्यार्थिनां संख्या	100	125
दिनानां संख्या	20	y

ध्यानं ददतु यत् यावन्तः विद्यार्थिनः अधिकाः भविष्यन्ति तावत् एव न्यून-समये भोजन-सामग्री समाप्ता भविष्यति ।

अतः एषा एका प्रतिलोम-समानुपातस्य स्थितिः अस्ति ।

अत एव $100 \times 20 = 125 \times y$

अथवा $\frac{100 \times 20}{125} = y$

अथवा $y = 16$

वैकल्पिक-रूपेण वयं $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ इति $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ लेखितुं शक्नुमः ।

अर्थात् $y_1 : x_2 = y_2 : y_1$

अथवा $100 : 125 = y : 20$

अथवा $y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

उदाहरणम् 9 यदि 15 श्रमिकाः काम् अपि भित्तिं 48 घण्टासु निर्मातुं शक्नुवन्ति तर्हि एतत् एव कार्यं 30 घण्टासु पूरयितुं कति श्रमिकाणाम् आवश्यकता भविष्यति ?

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु भित्तिं 30 घण्टासु निर्मातुं y श्रमिकाणाम् आवश्यकता अस्ति तदा वयं निम्नलिखितां सारणीं प्राप्नुमः ।

घण्टानां संख्या	48	30
श्रमिकाणां संख्या	15	y

स्पष्टतः अधिकः श्रमिकः भवेत् तर्हि भित्तेः निर्माणे न्यूनः समयः लगिष्यति ।

अतः एषा एका प्रतिलोम-समानुपातस्य स्थितिः अस्ति ।

अत एव $48 \times 15 = 30 \times y$

अतः $\frac{48 \times 15}{30} = y$ अथवा $y = 24$

अर्थात् एतत् कार्यं 30 घण्टासु समापितुं 24 श्रमिकाणाम् आवश्यकता अस्ति ।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखितेषु कः प्रतिलोम-अनुपाते अस्ति ?

(i) कस्मिंश्चित् अपि कार्ये युक्तानां व्यक्तीनां संख्या तथा तत् कार्यं पूरयितुं युक्तः समयः ।

(ii) एक-समानगत्या कस्याम् अपि यात्रायां गृहीतः समयः तथा आकलिता दूरी ।

(iii) आकृष्टायाः क्षेत्रभूमेः क्षेत्रफलं तथा कर्तितं शस्यम् ।

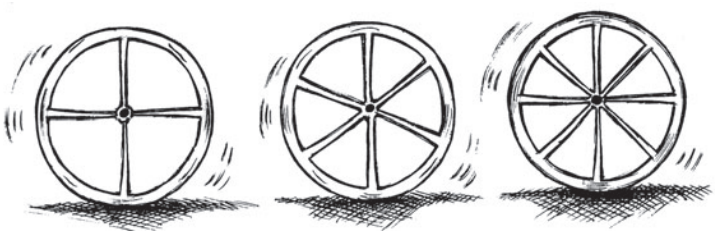
(iv) एकस्यां निश्चित-यात्रायां गृहीतः समयः तथा वाहनस्य गतिः ।

(v) कस्य अपि देशस्य जनसंख्या तथा प्रति व्यक्तेः भूमेः क्षेत्रफलम् ।

2. एकस्मिन् दूरदर्शन-खेलकार्यक्रमे रु.1,00,000 इत्यस्य पुरस्कार-राशिः विजेतृषु समान-रूपेण वितरितः भवति । निम्नलिखित-सारणीं पूरयन्तु तथा जानन्तु यत् किम् एकस्मै व्यक्तिगताय विजेत्रे दीयमान-पुरस्कारस्य धनराशिः विजेतृणां संख्यायाः अक्रमानुपाती अस्ति अथवा व्युत्क्रमानुपाती अस्ति ।

विजेतृणां संख्या	1	2	4	5	8	10	20
प्रत्येकं विजेत्रे पुरस्कारः (रुप्यकेषु)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. रहमानः शलाकानां काष्ठानां प्रयोगं कुर्वन् एकं चक्रं निर्माति । सः समान-शलाकाम् ईदृक् योजितुम् इच्छति यत् केषाम् अपि क्रमागतशलाका-युग्मानां मध्ये कोणः समानः भवेत् ।



निम्नलिखित-सारणीं पूरयित्वा तस्य सहायतां कुर्वन्तु -

शलाकानां संख्या	4	6	8	10	12
क्रमागत-शलाकानाम् एकस्य युग्मस्य मध्यस्थ कोणः	90°	60°	...	...	...

(i) किं शलाकानां संख्या तथा क्रमागतशलाकानां कस्य अपि युग्मस्य मध्यस्थ कोणः प्रतिलोम-समानुपाते अस्ति ?

(ii) 15 शलाकायुक्तस्य एकस्य चक्रस्य क्रमागत-शलाकानां कस्य अपि युग्मस्य कोणं परिकलयन्तु।

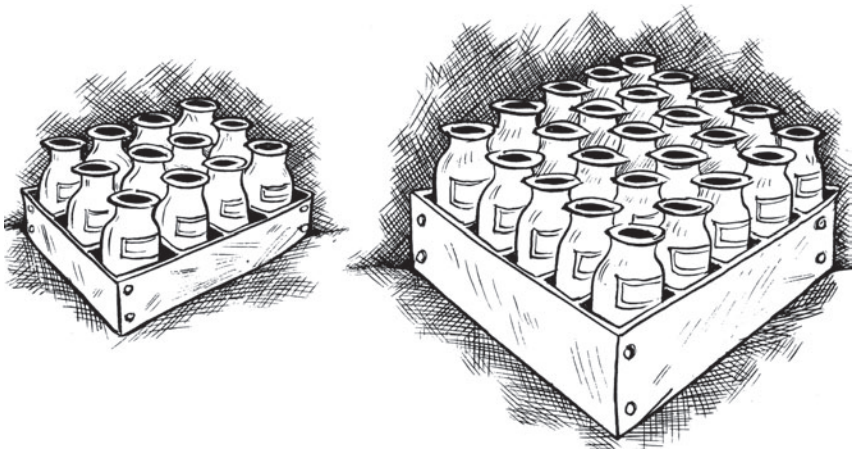
(iii) यदि क्रमागत-शलाकानां प्रत्येकं युग्मस्य मध्यस्थ कोणः 40° अस्ति तर्हि आवश्यक-शलाकानां संख्या कियत् भविष्यति ?

4. यदि कस्य अपि पुटकस्य मिष्ट्टानं 24 बालकेभ्यः दीयेत तर्हि प्रत्येकं बालकाय 5 मिष्ट्टान्नानि मिलन्ति यदि बालकानां संख्यायां 4 इत्यस्य न्यूनता आगच्छेत् तर्हि प्रत्येकं बालकाय कति मिष्ट्टान्नानि मेलिष्यन्ति ?

5. एकस्य कृषकस्य पशुशालायां 20 पशूनां कृते 6 दिनस्य पर्याप्तं भोजनम् अस्ति यदि अस्यां पशुशालायां 10 पशवः इतोऽपि आगच्छेयुः तर्हि एतत् भोजनं कति दिनानां कृते पर्याप्तं भविष्यति ?

6. एकः संविदाकर्मी एतत् आकलयति यत् जसमिन्दरस्य गृहे पुनः तन्त्रीं योजनस्य कार्यं 3 जनाः 4 दिनेषु कर्तुं शक्नुवन्ति यदि सः 3 जनानां स्थाने 4 जनान् अस्मिन् एव कार्ये योजयति तर्हि एतत् कार्यं कति दिनेषु पूरयिष्यति ?

7. कूपीनाम् एकं समूहं 25 पेटिकायां स्थापयति यद्यपि प्रत्येकं पेटिकायां 12 कूपयः सन्ति यदि अस्य एव समूहस्य कूपीः एवं रीत्या संरक्षेत् यत् प्रत्येकं पेटिकायां 20 कूपयः स्युः तर्हि कति पेटिकाः पूरिताः भविष्यन्ति ?



8. एकस्य उद्योग-गृहस्य कृते कानिचन वस्तूनि 63 दिनेषु निर्मातुं 42 यन्त्राणाम् आवश्यकता भवति तावत् संख्यकानि वस्तूनि 54 दिनेषु निर्मातुं कति यन्त्राणाम् आवश्यकता भविष्यति ?

9. एकं कारयानम् एकस्मिन् स्थाने गन्तुं प्रति घण्टा 60 किलोमीटर-गत्या चलित्वा 2 घण्टयोः समयं गृह्णन्ति। प्रति घण्टा 80 किलोमीटर-गत्या तत् कारयानं कति समयं नेष्यति ?

10. जनद्वयम् एकस्मिन् गृहे नूतन-गवाक्षान् 3 दिवसे योजितुं शक्नोति ।

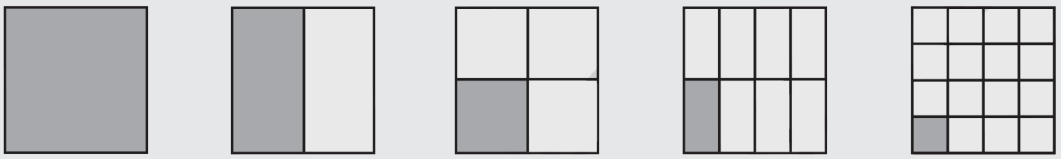
(i) कार्य-प्रारम्भात् प्राक् एकः जनः रुग्णः भवति । साम्प्रतम् एतत् कार्यं कति दिनेषु पूर्णतां यास्यति ।

(ii) एकस्मिन् एव दिवसे गवाक्षान् योजितुं कति व्यक्तीनाम् आवश्यकता भविष्यति ?

11. कस्मिन् अपि विद्यालये 45 मिनट इत्यस्य अवधेः 8 कालांशाः भवन्ति । एतत् कल्पयन्तु यत् विद्यालयस्य कार्य-समयः तावत् एव भवति यदि विद्यालये समान-अवधेः 9 कालांशाः स्युः तर्हि प्रत्येकं कालांशः कियत् समयस्य भविष्यति ?

एतत् कुर्वन्तु

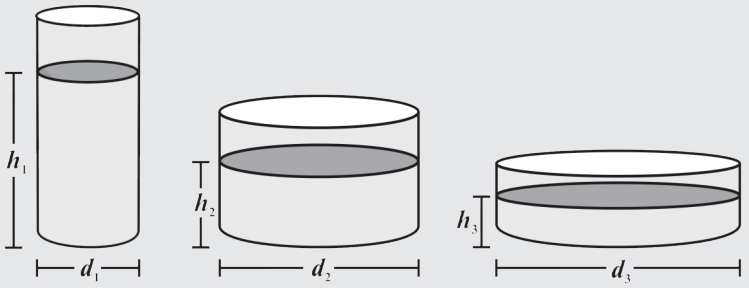
1. एकस्य कर्गदस्य समूहं गृह्णन्तु । एतत् आकृतौ प्रदर्शनानुसारं पुटीकुर्वन्तु । प्रत्येकं स्थितौ भागानां संख्या तथा एकस्य भागस्य क्षेत्रफलं लिखन्तु ।



स्वकीय-प्रेक्षणानां सारणीं निर्मापयन्तु तथा तस्याः सारणी विषये स्व मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु । किम् एषा एका प्रतिलोम-समानुपातस्य स्थितिरस्ति ? कथम् ?

भागानां संख्या	1	2	4	8	16
प्रत्येकं भागस्य क्षेत्रफलम्	कर्गदस्य क्षेत्रफलम्	कर्गद क्षेत्रफलस्य $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. वृत्तीयाधार-युक्तानां विभिन्न-मापानां किञ्चित् पात्रं गृह्णन्तु । प्रत्येकं पात्रे जलस्य समान-मात्रां पूरयन्तु । प्रत्येकं पात्रस्य व्यासः तथा तस्मिन् पात्रे कियत् औन्नत्य-पर्यन्तं तत् मापयित्वा लिखन्तु । स्व प्रेक्षणस्य एकां सारणीं निर्मापयन्तु । किम् एषा एका प्रतिलोम-समानुपातस्य स्थितिः अस्ति ?



पात्रस्य व्यासः (cm इत्यस्मिन्)			
जलस्तरस्य औन्नत्यम् (cm इत्यस्मिन्)			

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. राशिद्वयं x तथा y प्रत्यक्षम् अथवा साक्षात्-समानुपाते अथवा परस्परम् अक्रमानुपाती इति उच्यते यदि एते सहैव एवं रीत्या वर्धेते अपक्षीयेते च तर्हि एवं प्रतीयते यत् तयोः सङ्गत- मानानाम् अनुपातः अचरः अस्ति। अर्थात् यदि $\frac{x}{y} = k$ स्यात् (यत्र k एकः धनात्मकः अचरः अस्ति) तर्हि x तथा y परस्परम् अनुक्रमानुपाती इति उच्यते। एवं स्थितौ यदि x इत्यस्य मानयोः x_1, x_2 इत्यनयोः कृते y इत्यस्य सङ्गतमानः क्रमशः y_1, y_2 स्यात् तर्हि $\frac{x_1}{x_1} = \frac{x_2}{y_1}$ भवति।

2. राशिद्वयं x तथा y प्रतिलोम-समानुपाते अथवा परस्परं व्युत्क्रमानुपाती इति उच्यते यदि x इत्यस्मिन् जातायां एकस्यां वृद्धौ y इत्यस्मिन् एकां समानुपाती-न्यूनताम् उत्पादयन्तु तथा x इत्यस्मिन् जातायां एकस्यां न्यूनतायां y इत्यस्मिन् एकां समानुपाती-वृद्धिम् उत्पादयन्तु येन तयोः सङ्गत- मानानां गुणनफलम् अचरं तिष्ठेत् अर्थात् यदि $xy=k$ स्यात्तर्हि x तथा y परस्परं व्युत्क्रमानुपाती इति उच्यते। एवं स्थितौ यदि xइत्यस्य मानयोः x_1, x_2 इत्यनयोः कृते y इत्यस्य सङ्गतमानः क्रमशः y_1, y_2 स्यात् तर्हि $x_1, y_1 = x_2, y_2$ अथवा $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ भवति।

अध्यायः

14

गुणनखण्डनम्

14.1 भूमिका

14.1.1. प्राकृतसंख्यानां गुणनखण्डः

भवतां संज्ञाने भविष्यति यत् भवन्तः गुणनखण्डानां विषये VI कक्ष्यायां पठितवन्तः। आगच्छन्तु एकां प्राकृत-संख्यां गह्णामः। स्वीकुर्वन्तु यत् एषा संख्या 30 अस्ति। वयम् एतां संख्यां प्राकृत-संख्यानां गुणनफलरूपे लिखामः यथा

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

एवं रीत्या 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 तथा 30 संख्या 30 इत्यस्याः गुणनखण्डाः सन्ति। एतासु 2, 3 तथा 5 संख्या 30 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डः अस्ति (कथम् ?)। यदा का अपि संख्या अभाज्य-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखिता स्यात् तदा सा तस्याः अभाज्यगुणनखण्डरूपे भवति। उदाहरणार्थं 30 इति वयम् अभाज्य-गुणनखण्डरूपे $2 \times 3 \times 5$ इति लिखामः। 70 इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डरूपं $2 \times 5 \times 7$ इति लिखामः। 90 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डरूपं $2 \times 3 \times 3 \times 5$ इत्यादिः।

> वयं जानीमः यत् 30 इति अस्मिन् रूपे अपि लेखितुं शक्यते $30 = 1 \times 30$ एवमेव 1 तथा 30 अपि 30 इत्यस्य गुणनखण्डः अस्ति। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् 1 इति प्रत्येकं संख्यायाः एकः गुणनखण्डः भवति उदाहरणार्थम् $101 = 1 \times 101$ भवति परन्तु यदा अपि वयं काम् अपि संख्यां गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लेखिष्यामः तदा वयं 1 इति गुणनखण्डरूपे तावत् पर्यन्तं न लेखिष्यामः। यावत् विशेषरूपेण आवश्यकं न भवेत्।

एवमेव वयं बीजीय-व्यञ्जकान् अपि तस्य गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे व्यक्तुं शक्नुमः। अस्य अध्ययनं वयम् अस्मिन् अध्याये कुर्मः।

14.1.2 बीजीय-व्यञ्जकानां गुणनखण्डः

वयं VII कक्ष्यायां दृष्टवन्तः यत् बीजीय-व्यञ्जकानां पदं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे भवन्ति। उदाहरणार्थं बीजीय-व्यञ्जकः $5xy+3y$ इत्यस्मिन् $5xy$ इति पदं 5 इति गुणनखण्डैः x तथा y इति योगः अस्ति। अर्थात्

$$5xy=5\times x \times y$$

ध्यानं ददतु यत् $5xy$इत्यस्य गुणनखण्डः 5, x तथाy इत्यनयोः इतः अपि गुणनखण्डितुं न शक्यते। अर्थात् तान् गुणनखण्डानां

> ध्यानं ददतु यत् 1 पदं $5xy$ इत्यस्य एकः गुणनखण्डः अस्ति। यतो हि
> $$5xy=1\times5\times x\times y$$
> वस्तुतः 1 इति प्रत्येकं पदस्य एकः गुणनखण्डः भवति। प्राकृत-संख्यानां स्थितेः सदृशं यावत् पर्यन्तं विशेषरूपेण आवश्यकं न स्यात् वयं 1 इति कस्य अपि पदस्य पृथक्तया गुणनखण्डं लेखितुं न शक्नुमः।

गुणनफलरूपे व्यक्तुं न शक्यते। वयं कथयितुं शक्नुमः यत् 5xy इत्यस्य अभाज्य-गुणनखण्डः 5, x तथाy अस्ति। बीजीय-व्यञ्जकेषु वयम् ' अभाज्य ' इत्यस्य स्थाने 'अखण्डनीयः' इति शब्दस्य प्रयोगं कुर्मः। वयं कथयामः यत् 5xy इत्यस्य अखण्डनीयं रूपं 5×x×y अस्ति। ध्यानं ददतु यत् 5×(xy), 5xy इति पदस्य अखण्डनीयं रूपं नास्ति यतो हि गुणनखण्डः xy इति अग्रे x एवंy इत्यस्य गुणनफलरूपे व्यक्तुं शक्यते अर्थात् xy=x×y इति अस्ति।

साम्प्रतं व्यञ्जकः 3x(x+2) इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु। एतं गुणनखण्डानां 3, x तथा (x+2) इत्यस्य गुणनफलरूपे व्यक्तुं शक्यते। अर्थात्

$$3x(x+2)=3\times x\times(x+2)$$

व्यञ्जकः 3x(x+2) इत्यस्य अखण्डनीयः गुणनखण्डः 3xतथा (x+2) अस्ति।

एवमेव व्यञ्जकः 10x (x+2)(y+3) इति अखण्डनीयरूपे एवं रीत्या व्यक्तुं शक्यते।

$$10x\ (x+2)(y+3)=2\times5\times x\times\ (x+2)\times(y+3)$$

14.2 गुणनखण्डनं किम् अस्ति ?

यदा वयं कस्य अपि बीजीय-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डनं कुर्मः तदा वयं तं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखामः। एते गुणनखण्डाः, संख्याः, बीजीयचराः तथा बीजीय-व्यञ्जकाः भवितुं शक्नुवन्ति । $3xy$, $5x^2y$, $2x(y+2)$,$5(y+1)(x+2)$ सदृशः व्यञ्जकः पूर्वतः एव गुणनखण्डरूपे सन्ति। यथा वयं पूर्वतः एव जानीमः वयम् उपरोक्त-व्यञ्जकानां गुणनखण्डान् एतत् दृष्ट्वैव पठितुं शक्नुमः। एतत् विपरीतं $2x+4$,$3x+3y$,x^2+5x, x^2+5x+6 एतादृक् व्यञ्जकेषु अपि विचारं कुर्वन्तु। एतत् स्पष्टं नास्ति यत् एतेषां गुणनखण्डाः के सन्ति। एतादृशानां व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कर्तुम् क्रमबद्धविधीनां विकासः करणीयः। एतत् एव इदानीं वयं कुर्मः।

14.2.1 सार्व-गुणनखण्डानां विधिः

- वयम् एकेन सरल-उदाहरणेन आरभामः 2x+4 इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।
  वयम् एतस्य प्रत्येकं पदम् अखण्डनीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लेखिष्यामः।

$$2x=2\times x$$

$$4=2\times2$$

$$\text{अतः } 2x+4=(2\times x)+(2\times2)$$

ध्यानं ददतु यत् गुणनखण्डः 2 उभयोः पदयोः उभयनिष्ठं (सार्व इति) अस्ति।

पश्यन्तु वण्टननियमेन $2\times(x+2)=(2\times x)+(2\times2)$

अतः वयं लेखितुं शक्नुमः यत्

$$2x+4=2\times(x+2)=2(x+2)$$

एवं रीत्या व्यञ्जकः 2x+4 तदेव अस्ति यत् 2(x+2) अस्ति। अधुना वयम् अस्य गुणनखण्डं पठितुं शक्नुमः। एते 2 तथा (x+2) स्तः। एते गुणनखण्डाः अखण्डनीयाः सन्ति।

इदानीम् 5xy+10x इति गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

5xy तथा 10x इत्यनयोः अखण्डनीय-गुणनखण्डरूपं क्रमशः अस्ति।

$$5xy=5\times x\times y$$

$$10x=2\times5\times x$$

ध्यानं ददतु यत् उभयोः पदयोः 5 तथा x उभयनिष्ठ-गुणनखण्डः अस्ति। साम्प्रतम् ,

$$5xy+10x=(5\times x\times y)+(5\times x\times2)$$

$$(5x\times y)+(5x\times2)$$

वयम् उभे पदे वण्टन-नियमेन संयोजयामः ।

$$(5x\times y)+(5x\times 2)=5x\times(y+2)$$

अतः $5xy+10x=5\ x\ (y+2)$(एतत् एव वाञ्छित-गुणनखण्डरूपे अस्ति ।)

उदाहरणम् 1 $12a^2\ b+15ab^2$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् वयं प्राप्नुमः यत् $12a^2\ b=2\times2\times3\times a\times a\times b$

$15ab^2=3\times5\times a\times b\times b$

एतयोः उभयोः पदयोः 3, a तथा b सार्व-गुणनखण्डः अस्ति ।

अतः $12a^2\ b+15ab^2 = (3\times a\times b\times2\times2\times a)+(3\times a\times b\times5\times b)$

$= 3\times a\times b\times[(2\times2\times a)+(5\times b)]$

$= 3ab\times(4a+5b)$ (पदानां योगानन्तरम्)

$= 3ab(4a+5b)$ (वाञ्छित-गुणनखण्डरूपम्)

उदाहरणम् 2 $10x^2-18x^3+14x^4$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् $10x^2=2\times5\times x\times x$

$18x^3=2\times3\times3\times x\times x\times x$

$14x^4=2\times7\times x\times x\times x\times x$

एतेषु त्रयेषु अपि पदेषु सार्व-गुणनखण्डः 2, x तथा x सन्ति ।

अतः $10x^2-18x^3+14x^4=(2\times x\times x\times5)-(2\times x\times x\times3\times3\times x)$

$+ (2\times x\times x\times7\times x\times x)$

$= 2\times x\times x\times[(5-(3\times3\times x)+(7\times x\times x)]$

$= 2x^2\times(5-9x+7x^2)=2x^2\times(7x^2-9x+5)$ (त्रयाणां पदानां योजने सति)

प्रयत्नं कुर्वन्तु

गुणनखण्डं कुर्वन्तु

(i) $12x+36$ (ii) $22y-33z$ (iii) $14pq+35pqr$

किं भवन्तः पश्यन्ति यत् एकस्य व्यञ्जकस्य गुणनखण्डरूपे केवलम् एकमेव पदं भवति?

14.2.2 पदानां पुनः समूहनद्वारा गुणनखण्डनम्

$2xy+2y+3x+3$एतेषु व्यञ्जकेषु विचारं कुर्वन्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् पूर्वयोः द्वयोः पदयोः सार्वगुणनखण्डः 2 तथा y अस्ति एवम् अन्तिमयोः द्वयोः पदयोः सार्वगुणनखण्डः 3 अस्ति परन्तु सर्वेषु पदेषु कश्चित् सार्वगुणनखण्डः नास्ति । वयं केन प्रकारेण आरम्भं कुर्मः ?

आगच्छन्तु $(2xy+2y)$ इति गुणनखण्डरूपे लिखामः ।

$2xy+2y=(2\times x\times y)+(2\times y)$

$= (2\times y\times x)+(2\times y\times1)$

$= (2y\times x)+(2y\times1)=2y(x+1)$

एवमेव $3x+3=(3\times x)+(3\times1)$

$=3\times(x\times1)=3\ (x\times1)$

ध्यानं ददतु - अत्र अस्माभिः 1 इति गुणनखण्डरूपे प्रदर्शनस्य आवश्यकता अस्ति । कथम् ?

अतः $2xy+2y+3x+3=2y(x+1)+3\ (x+1)$

ध्यानं ददतु यत् अत्र दक्षपक्षस्य उभयोः पक्षयोः एकः सार्व-गुणनखण्डः $(x+1)$ अस्ति। उभयोः पदयोः मेलने सति ,

$2xy+2y+3x+3=2y(x+1)+3(x+1)=(x+1)(2y+3)$

साम्प्रतं $2xy+2y+3x+3$ इति व्यञ्जकः गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे अस्ति। अस्य गुणनखण्डः $(x+1)$ तथा $(2y+3)$ अस्ति। ध्यानं ददतु यत् एते गुणनखण्डाः अखण्डनीयाः सन्ति।

पुनः समूहनं किम् अस्ति ?

स्वीकुर्वन्तु यत् उपरोक्त-व्यञ्जकः $2xy+3+2y+3x$ रूपे प्रदत्तः अस्ति।तदा अस्य गुणनखण्डं द्रष्टुं सरलं नास्ति। एतम् एव व्यञ्जकं $2xy+2y+3x+3$ इति रूपे पुनर्व्यवस्थिते सति अस्य $(2xy+2y)$ तथा $(3x+3)$ समूहं निर्माय गुणनखण्डनं कर्तुं शक्यते एतत् एव पुनः समूहनम् अस्ति।

पुनः समूहनम् एकाद् अधिकविधिद्वारा सम्भवम् अस्ति । स्वीकुर्वन्तु यत् वयम् उपरोक्त-व्यञ्जकं $2xy+3x+2y+3$ इति रूपे पुनः समूहनं कुर्मः । एतस्मात् अपि वयं गुणनखण्डं प्राप्तुं शक्नुमः । आगच्छन्तु , प्रयासं कुर्मः

$$2xy+3x+2y+3=2\times x\times y+3\times x+2y+3$$
$$= x\times(2y+3)+1\times(2y+3)$$
$$= (2y+3)(x+1)$$

गुणनखण्डाः ते एव सन्ति (यथा ते भवितव्याः) यद्यपि ते विभिन्न-क्रमे दृष्टिगोचराः सन्ति।

उदाहरणम् 3 $6xy - 4y + 6 - 9x$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम्

1 चरणम् परीक्षणं कुर्वन्तु किं सर्वेषु पदेषु कश्चित् सार्व-गुणनखण्डः अस्ति। अत्र कश्चित् अपि नास्ति।

2 चरणम् समूहनं विषये विचारयन्तु। ध्यानं ददतु यत् पूर्वयोः द्वयोः पदयोः सार्व-गुणनखण्डः $2y$ अस्ति। अतः

$$6xy-4y=2y(3x-2) \qquad (a)$$

अन्तिमयोः द्वयोः पदयोः विषये किं कथयितुं शक्यते ? तानि पदानि पश्यन्तु यदि भवन्तः अस्य क्रमः परिवर्त्य $-9x+6$, इति लिखन्तु तर्हि गुणनखण्डः $(3x-2)$ आगमिष्यति।

$$\text{अतः} -9x+6=-3(3x)+3(2)$$
$$=-3(3x-2) \qquad (b)$$

3 चरणम् (a) तथा(b) इति सहैव स्थापने सति

$$6xy-4y+6-9x=6xy-4y-9x+6$$
$$= 2y(3x-2)-3(3x-2)$$
$$= (3x-2)(2y-3)$$

एवमेव $(6xy-4y+6-9x)$ इत्यस्य गुणनखण्डः $(3x-2)$ तथा $(2y-3)$ अस्ति।

प्रश्नावली 14.1

1. प्रदत्त-पदेषु सार्व-गुणनखण्डं जानन्तु।

(i) 12x, 36 (ii) 2y, 22xy (iii) $14pq, 28p^2 q^2$

(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2 b$

(iv) $16x^3, -4x^2, 32x$ (vii) 10pq, 20qr, 30rp

(viii) $3x^2 y^3, 10x^3 y^2, 6x^2 y^2 z$

2. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डनं कुर्वन्तु

(i) 7x-42 (ii) 6p-12q (iii) $7a^2+14a$

(iv) $-16 z+20z^3$ (v) $20l^2 m+30a l m$

(vi) $5 x^2 y-15xy^2$ (vii) $10 a^2-15 b^2+20 c^2$

(viii) $-4 a^2+4 ab-4 ca$ (ix) $x^2 y z+x y^2 z+x y z^2$

(x) $a x^2 y+b x y^2+c x y z$ (त्रयाणां पदानां मेलने सति)

3. गुणनखण्डनं कुर्वन्तु -

(i) $x^2+x y+8x+8y$ (ii) 15 xy-6x+5y-2

(iii) ax+bx-ay-by (iv) 15 pq+15+9q+25p

(v) z-7+7 x y-x y z

14.2.3 सर्वसमिकानां प्रयोगद्वारा गुणनखण्डनम्

वयं जानीमः यत् $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$ (I)

$(a-b)^2= a^2-2ab+b^2$ (II)

$(a+b)(a+b) = a^2-b^2$ (III)

निम्नलिखित-समाधितात् उदाहरणात् एतत् स्पष्टं भविष्यति यत् गुणनखण्डनाय एतासां सर्वसमिकानां प्रयोगः कथं भवति। सर्वप्रथमं वयं प्रदत्तान् व्यञ्जकान् पश्यामः यदि एतत् उपरोक्त-सर्वसमिकासु कस्य अपि एकस्य दक्षपक्षरूपस्य अस्ति तर्हि तस्याः सर्वसमिकायाः वामपक्षस्य सङ्गत-व्यञ्जकात् वाञ्छित-गुणनखण्डं प्राप्तुं शक्यते।

उदाहरणम् 4 $x^2+8x+16$ इत्यस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

समाधानम् एतं व्यञ्जकं पश्यन्तु। अस्य त्रीणि पदानि सन्ति। अतः अस्मिन् III संख्यकानां सर्वसमिकानां प्रयोगः भवितुं नार्हति। सहैव अस्य प्रथमम् अथ तृतीयं पदं पूर्णवर्गः अस्ति तथा मध्यस्थ पदस्य चिह्नं धनात्मकम् अस्ति। अतः एतत् $a^2+2ab+b^2$ इत्यस्य रूपस्य अस्ति,

यत्र $a=x$ तथा $b=4$ अस्ति।

एवमेव $a^2+2ab+b^2 = x^2+2(x)(4)+4^2$

$= x^2+8x+16$

यतो हि $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$,

तोलनायां सत्यां $x^2+8x+16 = (x+4)^2$ (वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)

उदाहरणम् 5 $4y^2-12y+9$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् ध्यानं ददतु यत् $4y^2=(2y)^2, 9=3^2$ तथा $12y=2\times3\times(2y)$

अतः $4y^2-12y+9=(2y)^2-2\times3\times(2y)+(3)^2$

$= (2y-3)^2$ (वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)

ध्यानं ददतु यत् प्रदत्त-व्यञ्जकः $a^2-2ab+b^2$ इति रूपस्य अस्ति, यत्र $a=2y, b=3$ तथा $2ab=2\times2y\times3=12y$ अस्ति।

उदाहरणम् 6 $49p^2-36$ इत्यस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

समाधानम् अत्र द्वे पदे स्तः। उभौ अपि पूर्ण-वर्गौ स्तः तथा द्वितीयः ऋणात्मकः अस्ति अर्थात् एतत् (a^2-b^2) व्यञ्जकरूपेण अस्ति। अत्र III सर्वसमिकायाः प्रयोगः भविष्यति।

$$49p^2-36=(7p)^2-(6)^2$$

$$= (7p-6)(7p+6)\text{(वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)}$$

उदाहरणम् 7 $a^2-2ab+b^2-c^2$ इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् प्रदत्त-व्यञ्जकस्य पूर्वं त्रिभ्यः पदेभ्यः $(a-b)^2$ प्राप्यते।चतुर्थपदम् एकः वर्गः अस्ति। अत एव एतं व्यञ्जकं वर्गद्वयस्य अन्तररूपे परिवर्तितुं शक्यते।

इत्थं रीत्या $a^2-2ab+b^2-c^2=(a-b)^2-c^2$ (सर्वसमिका II इत्यनेन)

$= [(a-b)-c)((a-b)+c)]$ (सर्वसमिका III इत्यनेन)

$= (a-b-c)(a-b+c)$ (वाञ्छित-गुणनखण्डनम्)

ध्यानं ददतु यत् वाञ्छित-गुणनखण्डनं प्राप्तुं वयं कथं क्रमेण सर्वसमिकाद्वयस्य प्रयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणम् 8 m^4-256 इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् $m^4=(m^2)^2$ तथा $256=(16)^2$

अतः प्रदत्त-व्यञ्जकेषु सर्वसमिका III इत्यस्य प्रयोगः भविष्यति।

अत एव $m^4-256=(m^2)^2-(16)^2$

$= (m^2-16)=(m^2+16)$ [सर्वसमिका (III) इत्यनेन]

साम्प्रतं m^2+16 इति परं गुणनखण्डः भवितुं नार्हति परन्तु (m^2-16) इत्यस्य सर्वसमिका III इत्यस्य प्रयोगात् इतोऽपि गुणनखण्डः भवितुम् अर्हति।

साम्प्रतं $m^2-16=m^2-4^2$

$= (m-4)(m+4)$

अत एव $m^4-256=(m-4)(m+4)(m^2+16)$

14.2.4 (x+a)(x+b) इत्यस्यरूपस्यगुणनखण्डः

आगच्छन्तु साम्प्रतं वयं चर्चां कुर्मः यत् एकचरीय-व्यञ्जकानां यथा $x^2+5x+6, y^2-7y+12, z^2-4z-12, 3m^2+9m+6$, इत्यादीनां गुणनखण्डनं कथं कर्तुं शक्नुमः। ध्यानं ददतु यत् एषः व्यञ्जकः $(a+b)^2$ अथवा $(a-b)^2$ इति प्रकारस्य नास्ति अर्थात् एषः पूर्णवर्गः नास्ति। उदाहरणार्थं x^2+5x+6 इत्यस्मिन् 6 पदं एकः पूर्णवर्गः नास्ति। स्पष्टतः एतादृशाः व्यञ्जकाः (a^2-b^2) इति प्रकारकाः अपि न सन्ति।

परन्तु एते व्यञ्जकाः $x^2+(a+b)x+ab$ इति प्रकारकः प्रतीयते अत एव एतादृशं गुणनखण्डनं कर्तुं वयं गत-अध्याये कृत-अध्ययनस्य सर्वसमिका-सप्त इत्यस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः। एषा सर्वसमिका अस्ति -

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\ x+ab \qquad \text{(IV)}$$

एतदर्थम् अस्माभिः x इत्यस्य गुणाङ्कः अचरपदञ्च द्रष्टव्यम्। आगच्छन्तु , निम्नलिखित-उदाहरणे पश्यामः यत् एतत् केन प्रकारेण भवति।

उदाहरणम् 9 x^2+5x+6 इत्यस्य गुणनखण्डनं कुर्वन्तु।

समाधानम् यदि वयं सर्वसमिका (IV) इत्यस्य दक्षपक्षात् x^2+5x+6 इत्यस्य तोलनं कुर्मः तदा वयं प्राप्नुमः यत् ab=6 तथा a+b=5 अस्ति। इतः अस्माभिः a तथा b इति ज्ञातव्यं तदा (x+a) तथा (x+b) इति गुणनखण्डौ भविष्यतः।

यदि ab=6 अस्ति तर्हि अस्य अर्थः अस्ति यत् a तथा b, 6 संख्यायाः गुणनखण्डः अस्ति।

आगच्छन्तु ab=6 तथा b=1 इति नीत्वा प्रयासं कुर्मः। एतेषां मानानां कृते a+b=7 अस्ति तथा 5 नास्ति। अत एव एषः विकल्पः समीचीनः नास्ति।

आगच्छन्तु a=2 तथा b=3 इति नीत्वा प्रयासं कुर्मः। एतदर्थं a+b=5 अस्ति, समीचीनं तदेव अस्ति यत् वयम् इच्छामः।

तदा, अस्य प्रदत्त-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डरूपं (x+ 2) तथा (x+3) अस्ति।

व्यापकरूपे x^2+px+q इति प्रकारस्य बीजीय-व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कर्तुं वयं q इत्यस्य (अर्थात् अचर-पदस्य) गुणनखण्डद्वयं a तथा b एवं रीत्या जानीमः यत् -

ab=q तथा a+b=p भवेत्।

तदा एषः व्यञ्जकः भवति $x^2+(a+b)\ x+ab$

अथवा $x^2+ax+bx+ab$

अथवा $x(x+a)+b(x+a)$

अथवा $(x+a)\ (x+b)$ यः वाञ्छितः गुणनखण्डः अस्ति।

उदाहरणम् 10 $y^2-7y+12$ इत्यस्य गुणनखण्डं जानन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् 12=3×4 तथा 3+4=7 अस्ति।

अत एव $y^2-7y+12=y^2-3y-4y+12$

$= y(y-3)-4(y-3)=(y-3)(y-4)$

ध्यानं ददतु यत् अस्मिन् क्रमे वयं a तथा b ज्ञातुं प्रदत्त-व्यञ्जकस्य तोलनं IV सर्वसमिकातः न कृतवन्तः।पर्याप्त-अभ्यासानन्तरं भवतां कृते प्रदत्त-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कर्तुं तस्य सर्वसमिकायाः व्यञ्जकेभ्यः तोलनं कर्तुम् आवश्यकता नास्ति तथा भवन्तः साक्षात् एव गुणनखण्डं कर्तुं शक्नुवन्ति यथा वयम् उपरि कृतवन्तः।

उदाहरणम् 11 $z^2-4z-12$ इत्यस्य गुणनखण्डं प्राप्नुवन्तु।

समाधानम् अत्र a b= -12 अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति यत् a तथा bइत्यनयोः एकः ऋणात्मकः अस्ति। सहैव a+b=-4 अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति यत् बृहत् संख्यात्मकपरिमाणयुक्तः ऋणात्मकः अस्ति। वयं a=-4 तथा b=3; संगृह्य प्रयासं कुर्मः परन्तु एतत् कार्यं न करिष्यति यतो हि a+b=-1 अस्ति। एतस्मात् अग्रिमं परिकलितं मानं a=-6 तथा b=2 अस्ति, तदा a+b=-4 अस्ति, यत् वयम् इच्छामः।

अतः $z^2-4z-12=z^2-6z+2z-12$

$= z(z-6)+2(z-6)$

$= (z-6)(z+2)$

उदाहरणम् 12 $3m^2+9m+6$ इत्यस्य गुणनखण्डं प्राप्नुवन्तु।

समाधानम् वयं पश्यामः यत् 3 समेषां पदानां एकः सार्व-गुणनखण्डः अस्ति।

अतः $3m^2+9m+6=3(m^2+3m+2)$

साम्प्रतं $m^2+3m+2=m^2+m+2m+2$ (यतोहि) $2=1\times2$

$= m(m+1)+2(m+1)$

$= (m+1)\ (m+1)$

अतः $3m^2+9m+6=3\ (m+1)(m+2)$

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु

(i) $a^2+8a+16$ (ii) $p^2-10p+25$ (iii) $25m^2+30m+9$

(iv) $49y^2+84yz+36z^2$ (v) $4x^2-8x+4$

(vi) $121b^2-88bc+16c^2$

(vii) $(l+m)^2-4lm$ (सङ्केतः पूर्वं $(l+m)^2$ इति प्रसारयन्तु।)

(viii) $a^4+2a^2\ b^2+b^4$

2. गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

(i) $4p^2-9q^2$ (ii) $63a^2-112b^2$ (iii) $49x^2-36$

(iv) $16x^5-144x^3$ (v) $(l+m)^2-(l-m)^2$

(vi) $9x^2\ y^2-16$ (vii) $(x^2-2xy+y^2)-z^2$

(viii) $25a^2-4b^2+28bc-49c^2$

3. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

(i) ax^2+bx (ii) $7p^2+21q^2$ (iii) $2x^3+2xy^2+2xz^2$

(iv) $am^2+bm^2+bn^2+an^2$ (v) $(lm+1)+m+1$

(vi) $y(y+z)+9(y+z)$ (vii) $5y^2-20y-8z+2yz$

(viii) $10ab+4a+5b+2$ (ix) $6xy-4y+6-9x$

4. गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

(i) a^4-b^4 (ii) p^4-81 (iii) $x^4-(y+z)^4$

(iv) $x^4-(x-z)^4$ (v) $a^4-2a^2\ b^2+b^4$

5. निम्नलिखित-व्यञ्जकानां गुणनखण्डं कुर्वन्तु।

(i) p^2+6p+8 (ii) $q^2-10q+21$ (iii) $p^2+6p-16$

14.3 बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनम्

वयं शिक्षितवन्तः यत् बीजीय-व्यञ्जकान् कथं योजयेत्, व्यवकलयेत् च। वयम् एतत् अपि जानीमः यत् द्वयोः व्यञ्जकयोः कथं गुणाकारः भवेत् परन्तु वयम् एकस्मात् बीजीय-व्यञ्जकात् द्वितीय-बीजीय-व्यञ्जकस्य विभाजनविषये इदानीं यावत् न चर्चितवन्तः अस्मिन् अनुच्छेदे वयम् एतत् एव कर्तुम् इच्छामः।

भवतां स्मरणे स्यात् एव यत् विभाजनं गुणनस्य प्रतिलोम-सङ्क्रिया अस्ति। एवं प्रकारेण $7\times8=56$ इत्यतः $56 \div 8 = 7$ अथवा$56 \div 7 = 8$ इत्यस्य प्राप्तिः भवति।

एतत् एव वयं बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनार्थं (अथवा भागाकारार्थम्) अपि कर्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थम् -

(i) $2x\times3x^2=6x^3$

अतः $6x^3\div2x=3x^2$

तथा सहैव $6x^3\div3x^2=2x$

(ii) $5x(x+4)= 5x^2+20x$

अतः $(5x^2+20x)\div5x=x+4$

तथा सहैव $(5x^2+20x)\div(x+4)=5x$

इदानीं वयं ध्यानपूर्वकेण द्रक्ष्यामः यत् एकं व्यञ्जकम् अन्यस्मात् व्यञ्जकात् कथं विभजितुं शक्नुमः। प्रारम्भार्थं वयम् एकस्याः एकपद्याः अन्यस्याः एकपद्याः विभाजने विचारं करिष्यामः।

14.3.1 एकपद्याः एकस्याः अन्य-एकपद्याः विभाजनम्

$6x^3\div2x$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

वयं $2x$ तथा $6x^3$ इति अखण्डनीय-गुणनखण्डरूपे लेखितुं शक्नुमः

$$2x=2\times x$$

$$6x^3=2\times3\times x\times x\times x$$

इदानीं वयं $2x$ इति पृथक् करणार्थं $6x^3$ इत्यस्य गुणनखण्डानां समूहं निर्मामः।

$$6x^3=2\times x\times(3\times x\times x)=(2x)\times(3x^2)$$

एवं प्रकारेण $6x^3\div2x=3x^2$

सार्व-गुणनखण्डान् निरस्तकरणस्य एकः संक्षिप्त-विधिः सः अस्ति यः वयं संख्यानां विभाजने कुर्मः।

यथा $77\div7 = \frac{77}{7} = \frac{7\times11}{7} = 11$

एवमेव $6x^3\div2x= \frac{6x^3}{2x}$

$$= \frac{2\times3\times x\times x\times x}{2\times x} =3\times x\times x=3x^2$$

उदाहरणम् 13 निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $-20x^4\div10x^2$ (ii) $7x^2\,y^2\,z^2\div14xyz$

समाधानम्

(i) $-20x^4=-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x$

$10x^2=2\times5\times x\times x$

अतः $(-20x^4)\div10x^2= \frac{-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x}{2\times5\times x\times x} =-2\times x\times x=-2x^2$

(ii) $7x^2\,y^2\,z^2 \div 14xyz = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times 7\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{x\times y\times z}{2} = \dfrac{1}{2}\,xyz$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

भागाकारं कुर्वन्तु

(i) $24xy^2\,z^3$ इति $6yz^2$ इत्यनेन सह (ii) $63a^2\,b^4\,c^6$ इति $7a^2\,b^2\,c^3$ इत्यनेन सह

14.3.2 एकस्य बहुपदस्य एकया एकपद्या सह विभाजनम्

आगच्छन्तु, एकस्य त्रिपदस्य $4y^3+5y^2+6y$ एकपद्या $2y$ इत्यनेन सह विभाजन-विषये विचारं कुर्वन्तु। [अत्र, वयं बहुपदस्य प्रत्येकं पदं गुणनखण्डरूपे लिखामः।] वयं प्राप्नुमः यत् $2\times y$ इत्यनयोः पदयोः एकः सार्व-गुणनखण्डः अस्ति सहैव वयम् एतं तृतीयपदाय $5y^2$ अपि एकस्मिन् सार्व-गुणनखण्डरूपे परिवर्तितुं शक्नुमः। तदा वयं प्राप्नुमः -

$$4y^3+5y^2+6y=2\times y\times(2\times y\times y)+2\times y\times\left(\frac{5}{2}\times y\right)+2\times y\times 3$$

$$= 2y(2y^2)+2y\left(\frac{5}{2}\,y\right)+2y(3)$$

$$= 2y\left(2y^2+\frac{5}{2}\,y+3\right)$$ (सार्वगुणनखण्डः $2y$ इति पृथक् प्रदर्शितम् अस्ति)

अतः $(4y^3+5y^2+6y)\div 2y$

$$= \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y} = \frac{2y(2y^2+\frac{5}{2}\,y+3)}{2y} = 2y^2+\frac{5}{2}\,y+3$$

वैकल्पिकरूपे वयं त्रिपदस्य प्रत्येकं पदं निरस्तीकरणस्य विधेः प्रयोगं कुर्वन्तः तत् एकपद्या सह भागाकारं कर्तुं शक्नुमः।

अत्र वयम् अंशे बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाजके एकपद्या भागाकारं कुर्मः।

$$(4y^3+5y^2+6y)\div 2y = \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y}+\frac{5y^2}{2y}+\frac{6y}{2y} = 2y^2+\frac{5}{2}\,y+3$$

उदाहरणम् 14 उपरोक्त-उभयोः विध्योः प्रयोगं कुर्वन्तः $24(x^2\,yz+xy^2\,z+xyz^2)$ इति $8xyz$ भागाकारं कुर्वन्तु।

समाधानम् $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$

$= 2\times2\times2\times3\times[(x\times x\times y\times z)+(x\times y\times y\times z)+(x\times y\times z\times z)]$

$= 2\times2\times2\times3\times x\times y\times z\times(x+y+z)$(सार्व-गुणनखण्डः बहिः ग्रहणे सति)

$= 8\times3\times xyz\times(x+y+z)$

अतः $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\div8xyz$

$$= \frac{(8\times3\times xyz\times(x+y+z)}{8\times xyz} = 3\times(x+y+z)=3(x+y+z)$$

वैकल्पिकरूपे $24(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\div8xyz = \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24x^2yz}{8xyz}$

$$= 3x+3y+3z=3(x+y+z)$$

14.4 बहुपदस्य बहुपदात् विभाजनम्

• $(7x^2+14x)\div(x+2)$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

हरेन सह $(7x^2+14x)$ इत्यस्य गुणनखण्डानां परीक्षणार्थं मेलनार्थञ्च पूर्वम् अस्य गुणनखण्डं कुर्मः।

$$7x^2+14x=(7\times x\times x)+(2\times7\times x)$$

$$=7\times x\times(x+2)=7x(x+2)$$

किम् अयं अंशस्य प्रत्येकं पदं भाजके प्रदत्त-द्विपदात् भागाकारं कर्तुं साहाय्यं करिष्यति ?

अधुना $(7x^2+14x)\div(x+2)= \frac{7x^2+14x}{x+2}$

$$= \frac{7x\,(x+2)}{x+2} = 7x$$ (गुणनखण्डः इति कर्तने सति)

उदाहरणम् 15 $44\,(x^4-5x^3-24x^2)$ इति$11x(x-8)$ इत्यनेन सह भागाकारं कुर्वन्तु।

समाधानम् $44\,(x^4-5x^3-24x^2)$ इति गुणनखण्डं कृते सति वयं प्राप्नुमः।

$$44(x^4-5x^3-24x^2)=2\times2\times11\times x^2\,(x^2-5x-24)$$

(कोष्ठकात् सार्व-गुणनखण्डः x^2 इति बहिः कृते सति)

$$= 2\times2\times11\times x^2\,(x^2-8x+3x-24)$$

$$= 2\times2\times11\times x^2\,[x(x-8)+3(x-8)]$$

$$= 2\times2\times11\times x^2\,(x-8)(x+3)$$

अतः $44\,(x^4-5x^3-24x^2)\div11x(x-8)$

$$= \frac{2\times2\times11\times x\times x\times(x+3)\times(x-8)}{11\times x\times(x-8)}$$

$$= 2\times2\times x(x+3)=4x(x+3)$$

उदाहरणम् 16 $z(5z^2-80)$ इति $5z(z+4)$ इत्यनेन सह भागाकारं कुर्वन्तु।

वयम् अंशे भाज्ये च सार्वगुणनखण्डं 11, x तथा (x - 8) इति कर्तयामः।

समाधानम् भाज्यः $=z(5z^2-80)$

$= z[(5 \times z^2)-(5\times16)]$

$= z\times5\times(z^2-16)$

$= 5z\times(z+4)\ (z-4)$[सार्वसमिका $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

इत्यस्य प्रयोगे कृते सति]

एवं प्रकारेण $z(5z^2-80)\div5z(z+4) = \frac{5z(z-4)(z+4)}{5z(z+4)} = (z-4)$

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $28x^4\div56x$ (ii) $-36y^3\div9y^2$ (iii) $66pq^2r^3\div11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3\div51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8\div(-6a^6b^4)$

2. प्रदत्त-बहुपदं प्रदत्त-एकपद्या सह भागाकारं कुर्वन्तु।

(i) $(5x^2-6x)\div3x$ (ii) $(3y^8-4y^6+5y^4)\div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2+x^2y^3z^2+x^2y^2z^3)\div4x^2y^2z^2$

(iv) $(x^3+2x^2+3x)\div2x$ (v) $(p^3q^6-p^6q^3)\div p^3q^3$

3. निम्नलिखितं विभजन्तु।

(i) $(10x-25)\div5$ (ii) $(10x-25)\div(2x-5)$

(iii) $10y(6y+21)\div5(2y+7)$ (iv) $9x^2y^2(3z-24)\div27xy(z-8)$

(v) $96abc\,(3a-12)(5b-30)\div144(a-4)(b-6)$

4. निर्देशानुसारं भागाकारं ददतु।

(i) $5(2x+1)(3x+5)\div(2x+1)$ (ii)$26xy(x+5)(y-4)\div13x(y-4)$

(iii) $52pqr(p+q)(q+r)(r+p)\div104pq(q+r)(r+p)$

(iv) $20(y+4)(y^2+5y+3)\div5(y+4)$

(v) $x(x+1)(x+2)(x+3)\div x(x+1)$

5. व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कुर्वन्तु तथा निर्देशानुसारं भागाकारं ददतु।

(i) $(y^2+7y+10)\div(y+5)$ (ii) $(m^2-14m-32)\div(m+2)$

(iii) $(5p^2-25p+20)\div(p-1)$ (iv) $4yz(z^2+6z-16)\div2y(z+8)$

(v) $5pq(p^2-q^2)\div2p(p+q)$ (vi) $12xy(9x^2-16y^2)\div4xy(3x+4y)$

(vi) $39y^3\,(50y^2-98)\div26y^2\,(5y+7)$

14.5 किं भवन्तः त्रुटिं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

कार्यम् 1एकस्य समीकरणस्य समाधानार्थं सरिता निम्नलिखित-प्रकारेण समाधानं करोति।

$3x+x+5x=72$

अतः $8x=72$

तथा अत एव $x = \frac{72}{8} = 9$

सः कुत्र त्रुटिं कृतवान् ? सम्यक् उत्तरं जानन्तु।

कस्य अपि पदस्य 1 इति गुणाङ्कस्य प्रायः प्रदर्शनं न भवति परन्तु समानपदानां योगसमये वयम् एतं योगे सम्मेलयामः।

कार्यम् 2 अप्पूः एतत् कृतवान्

$x=-3,5x=5-3=2$

किं तस्य प्रक्रिया समीचीना अस्ति ? यदि न तर्हि एतत् सम्यक् कुर्वन्तु।

एकस्य ऋणात्मकमानस्य स्थापन-समये कोष्ठकानां प्रयोगः भवेत् इति स्मरन्तु।

कार्यम् 3नम्रता सलमा च बीजीय-व्यञ्जकानां गुणनं निम्नलिखित-प्रकारेण कृतवती।

	नम्रता	सलमा
(a)	$3(x-4)=3x-4$	$3(x-4)=3x-12$
(b)	$(2x)^2=2x^2$	$(2x)^2=4x^2$
(c)	$(2a-3)(a+2)=2a^2-6$	$(2a-3)(a+2)$ $=2a^2+a-6$
(d)	$(x+8)^2=x^2+64$	$(x+8)^2$ $= x^2+16x+64$
(e)	$(x-5)^2=x^2-25$	$(x-5)^2=x^2-10x+25$

इति स्मरन्तु , यदा भवन्तः कोष्ठकान्तर्गतस्य कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणाकारं तस्य बहिः लिखित अचरेण (अथवा चरेण) सह कुर्वन्ति तदा व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदेन तस्य अचरस्य (अथवा चरस्य) गुणनं भवति।

इति स्मरन्तु, यदा भवन्तः कस्याः अपि एकपद्याः वर्गं कुर्वन्ति तदा संख्यात्मक-गुणाङ्कस्य प्रत्येकं गुणनखण्डस्य च वर्गः भवति ।.

किं नम्रता तथा सलमा द्वारा कृतं गुणनं सम्यक् अस्ति ? सकारणम् उत्तरं ददतु।

कस्य अपि सूत्रस्य प्रयोगात् पूर्वं एतत् सुनिश्चितं कुर्वन्तु यत् किं तस्य सूत्रस्य प्रयोगः वस्तुतः भवितुम् अर्हति।

कार्यम् 4 जोसफः एकं विभाजनम् अनेन विधिना कृतवान् $\frac{a+5}{5} = a+1$

एकं बहुपदं एकपद्या भागाकार-समये वयम् अंशस्य बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाज्ये प्रदत्त-एकपद्या सह भागाकारं कुर्मः।

तस्य मित्रेण शिरीशेन एतत् विभाजनम्

एवं प्रकारेण कृतम् $\frac{a+5}{5} = a$

तस्य अन्यमित्रं सुमनः एतत् एवं कृतवान् $\frac{a+5}{5} = \frac{a}{5} + 1$

कः विभाजनं सम्यक् अकरोत् ? कः विभाजनम् असमीचीनरीत्या कृतवान् ? तथा किमर्थम् ?

किञ्चित् मनोरञ्जनम्

अतुलः सदैव पृथक् विधिना विचारयति। सः सुमथि नामिकायाः अध्यापिकायाः पृच्छति " यदि भवती यत् किञ्चित् अपि कथयति तत् सर्वं सत्यम् अस्ति तर्हि अहं $\frac{64}{16} = \frac{4}{1} = 4$ इत्यस्मै समीचीनम् उत्तरं कथं प्राप्नोमि ?" अध्यापिका स्पष्टं करोति " एतत् अत एव अस्ति यत् $64=16\times4$ अस्ति तथा $\frac{64}{16} = \frac{16\times4}{16\times1} = \frac{4}{1}$ अस्ति। वस्तुतः वयं सार्व-गुणनखण्डः 16 इति कर्तयामः 6 इति न , यथा भवन्तः अपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति। वास्तवरूपे 6 नहि 64 इत्यस्य अथ नहि 16 इत्यस्य गुणनखण्डः अस्ति।" अध्यापिका अग्रे कथयति "सहैव $\frac{664}{166} = \frac{4}{1}$, $\frac{6664}{1666} = \frac{4}{1}$ इत्यादयः अपि सन्ति " किम् एतत् रोचकं नास्ति ? किं भवन्तः $\frac{64}{16}$ इति प्रकारस्य किञ्चित् अन्य-उदाहरणं ज्ञातुम् अतुलस्य साहाय्यं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

प्रश्नावली 14.4

निम्नलिखित-गणितीयकथनेषु त्रुटिं ज्ञात्वा तत् सम्यक् कुर्वन्तु।

1. $4(x-5)=4x-5$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2$ **3.** $2x+3y=5xy$

4. $x+2x+3x=5x$ **5.** $5y+2y+y-7y=0$ **6.** $3x+2x=5x^2$

7. $(2x)^2+4(2x)+7=2x^2+8x+7$ **8.** $(2x)^2+5x=4x+5x=9x$

9. $(3x+2)^2=3x^2+6x+4$

10. x=-3 इति प्रतिस्थापिते सति वयं प्राप्नुमः।

(a) x^2+5x+4 इत्यस्मात् $(-3)^2+5(-3)+4=9+2+4 = 15$ इति प्राप्यते।

(b) x^2-5x+4 इत्यस्मात् $(-3)^2-5(-3)+4=9-15+4 = -2$ इति प्राप्यते।

(c) x^2+5x इत्यस्मात् $(-3)^2+5(-3) = -9-15=-24$ इति प्राप्यते।

11. $(y-3)^2=y^2-9$ **12.** $(z+5)^2=z^2+25$

13. $(2a+3b)(a-b)=2a^2-3b^2$ **14.** $(a+4)(a+2)=a^2+8$

15. $(a-4)(a-2)=a^2-8$ **16.** $\frac{3x2^2}{3x2^2} = 0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = 1+1=2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{1}{2}$ 19. $\frac{3}{4x+3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x} = 5$ **21.** $\frac{7x+5}{5} = 7x$

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. यदा वयं कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं कुर्मः तदा वयं तान् गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखामः। एते गुणनखण्डाः, संख्याः, बीजीय-चराः , अथवा बीजीय-व्यञ्जकाः भवितुं शक्नुवन्ति।

2. एकः अखण्डनीयः गुणनखण्डः सः गुणनखण्डः अस्ति यम् इतोऽपि अग्रे गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे वयं व्यक्तुं न शक्नुमः।

3. कस्य अपि व्यञ्जकस्य गुणनखण्डकरणस्य एकः क्रमबद्धः विधिः सार्व-गुणनखण्डविधिः अस्ति। अस्य विधेः चरणत्रयं भवति। (i) व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदम् अखण्डनीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे लिखन्तु। (ii) सार्व-गुणनखण्डान् जानन्तु तथा तान् पृथक् कुर्वन्तु। (iii) प्रत्येकं पदे शेष-गुणनखण्डान् बण्टन-नियमानुसारेण संयोजयन्तु।

4. कदाचित् प्रदत्तस्य एकव्यञ्जकस्य सर्वेषु पदेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः न भवति परन्तु एतेषां पदानां केचन समूहाः एतादृशं विस्तारितुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं समूहस्य सर्वेषु पदेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः भवति। यदा वयम् एवं कुर्मः तदा सर्वेषु समूहेषु एकः सार्व-गुणनखण्डः प्रकटति यस्मात् वयं व्यञ्जकस्य गुणनखण्डं प्राप्नुमः। एषः विधिः पुनः समूहन-विधिः इति उच्यते।

5. पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डने , एतत् सर्वदैव स्मरणे स्यात् यत् व्यञ्जक-पदानां प्रत्येकं पुनः समूहन-पुनः व्यवस्थया गुणनखण्डः न प्राप्यते। अस्माभिः व्यञ्जकः द्रष्टव्यः तथा प्रयासविधिना विस्मरण - विधिना च पुनः समूहनं प्राप्तव्यम्।

6. गुणनखण्ड-योग्येषु व्यञ्जकेषु अनेके $a^2+2\ ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2 तथा $x^2+(a+b)\ x+ab$ इति रूपकाः भवन्ति अथवा एतान् अस्मिन् रूपे परिवर्तितुं शक्यते। एतेषां व्यञ्जकानां गुणनखण्डः 9 अध्याये प्रदत्त-निम्नलिखित-सर्वसमिकातः I, II, III तथा IV इत्यतः ज्ञातुं शक्यते।

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$x^2+(a+b)\ x+ab=(x+a)(x+b).$$

7. तेषु व्यञ्जकेषु, येषां गुणनखण्डाः $(x+a)(x+b)$ इति प्रकारकाः सन्ति, सर्वदैव स्मर्तव्यं यत् संख्यात्मकात् (अचरात्) पदात् ab इत्यस्य प्राप्तिः भवति। अस्य गुणनखण्डान् a तथा b इति एवं प्रकारेण चेतव्यं चिह्नं ध्याने संरक्ष्य यत् अस्य योगः x इति गुणाङ्कस्य समानं स्यात्।

8. वयं जानीमः यत् संख्यानां स्थितौ विभाजनं, गुणनस्य प्रतिलोम-सङ्क्रिया भवति। एतत् बीजीय-व्यञ्जकानां विभाजनाय अपि आवश्यकम् अस्ति।

9. एकं बहुपदं एकया एकपद्या विभाजन-स्थितौ वयं विभाजनं बहुपदस्य प्रत्येकं पदं तस्याः एकपद्याः भागाकारं कृत्वा कर्तुं शक्नुमः अथवा सार्व-गुणनखण्डविधिना कर्तुं शक्नुमः।

10. एकं बहुपदम् एकस्मात् बहुपदात् विभाजन-स्थितौ वयं भाज्य-बहुपदस्य प्रत्येकं पदं भाजक-बहुपदात् भागाकारं कृत्वा विभजितुं न शक्नुमः। अस्य स्थाने वयं प्रत्येकं बहुपदस्य गुणनखण्डं कुर्मः तथा एषु सार्व-गुणनखण्डं कर्तयामः।

11. अस्मिन् अध्याये पठितबीजीय-व्यञ्जक-विभाजनानां स्थितेः वयं भाज्यः = भाजकः × भागफलं प्राप्स्यामः परन्तु व्यापकरूपे एषः सम्बन्धः निम्नलिखितः अस्ति। भाज्यः = भाजकः × भागफलं + शेषफलम्। एवं प्रकारेण अस्मिन् अध्याये वयं केवलं तादृशानां विभाजनानां चर्चां कृतवन्तः येषु शेषफलं शून्यम् अस्ति।

12. बीजीय-प्रश्नानां समाधान-समये विद्यार्थिनः बहुप्रकारिकां त्रुटिं कुर्वन्ति। भवन्तः तादृशीं त्रुटिं न कुर्वन्तु एतदर्थं प्रयासं कुर्वन्तु।

अध्यायः
15

आलेखद्वारा परिचयः

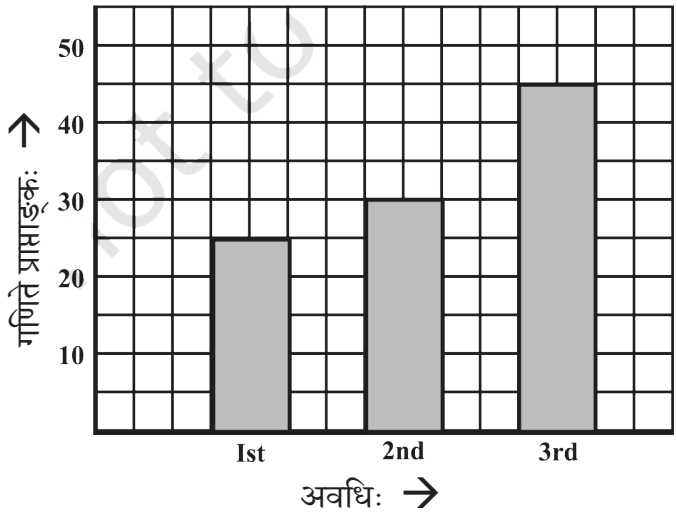
15.1 भूमिका

किं भवन्तः समाचार-पत्रेषु, दूरदर्शने, पत्रिकायां, पुस्तकादिषु आलेखं दृष्टवन्तः ? आलेखानाम् उद्देश्यं संख्यात्मक-तथ्यानां चित्रद्वारा प्रदर्शनम् अस्ति यस्मात् ते शीघ्रतया सरलरीत्या स्पष्टतया च अवगच्छेयुः । एतादृशः आलेखः एकत्रित-गणनानां चित्रद्वारा प्रदर्शनम् अस्ति । गणनां तालिकाद्वारा अपि प्रस्तोतुं शक्यते अपितु आलेखद्वारा प्रदर्शनबोधने बहुसरलं भवति । गणनानाम् आकर्षणम् अथवा तोलनं दर्शयितुम् एतत् बहु-उपयुक्तम् अस्ति । वयम् इदानीं यावत् अनेकप्रकारकम् आलेखं दृष्टवन्तः । आगच्छन्तु तान् स्मरामः ।

15.1.1 एकः दण्डः आलेखः

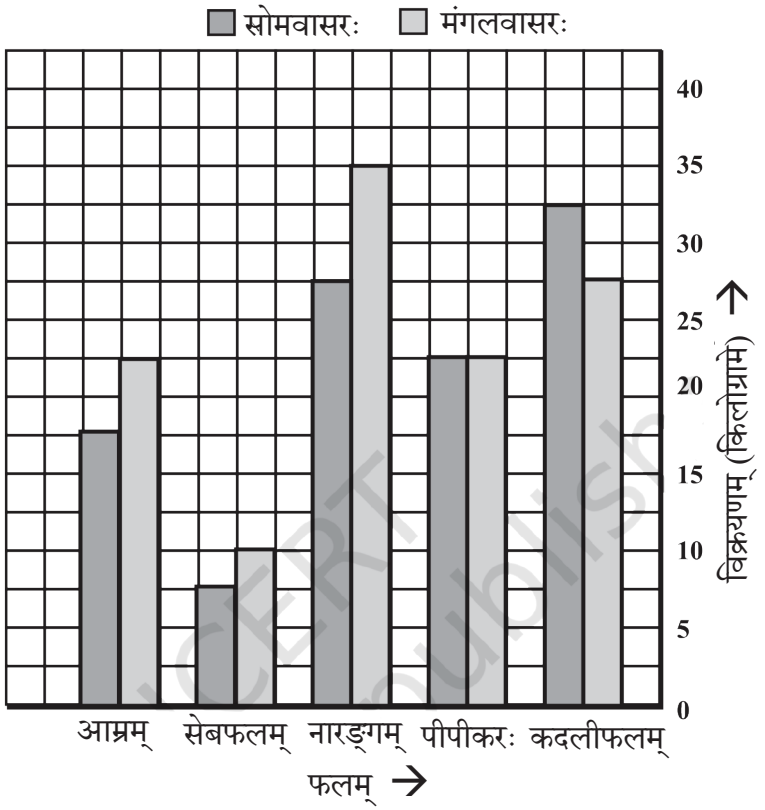
एकः दण्डः आलेखः विभिन्न-श्रेणीनां मध्ये तोलनक्रियायां सहायकः भवति । अस्मिन् द्वौ अथवा अधिक-समान्तरः अथवा ऊर्ध्वाधरः (अथवा क्षैतिजः) दण्डः अथवा आयतः भवति ।

15.1 आकृतौ दण्ड-आलेखः अनुद्वारा तिसृणां सत्रीय-परीक्षाणां गणिते प्राप्ताङ्कान् दर्शयति । एतत् भवतां तस्य प्रदर्शनस्य तोलनं सरलतया सम्पादने साहाय्यं करोति । वयं कथयितुम् अर्हामः यत् तस्य प्रगतिः समीचीना अस्ति ।



आकृतिः 15.1

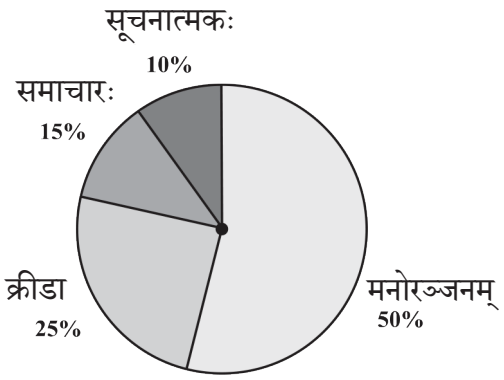
दण्डालेखेषु द्वितीयः दण्डः अपि भवितुम् अर्हति। यथा 15.2 आकृतौ। एषः आलेखः कयोश्चित् उभयोः दिनयोः विभिन्न-प्रकारकानां फलानां विक्रयणस्य (रु. इत्यस्मिन्) तुलनात्मकं विवरणम् अस्ति। 15.2 आकृतौ अथ 15.1 आकृतौ भेदः कः ? स्वकीय मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।



आकृतिः 15.2

15.1.2 वृत्त-चित्रम् (वृत्त-आलेखः अथवा पाई-ग्राफ-चित्रम्)

एकस्य वृत्त-आलेखस्य प्रयोगः कस्य अपि एकसम्पूर्णस्य विभिन्न-भागानां तोलनार्थं भवति। वृत्तः एकं सम्पूर्णं प्रदर्शयति। 15.3 आकृतौ एकः वृत्त-आलेखः अस्ति। एतत् दूरदर्शनस्य विभिन्न-सारणीनां दर्शकानां प्रतिशततां दर्शयति।



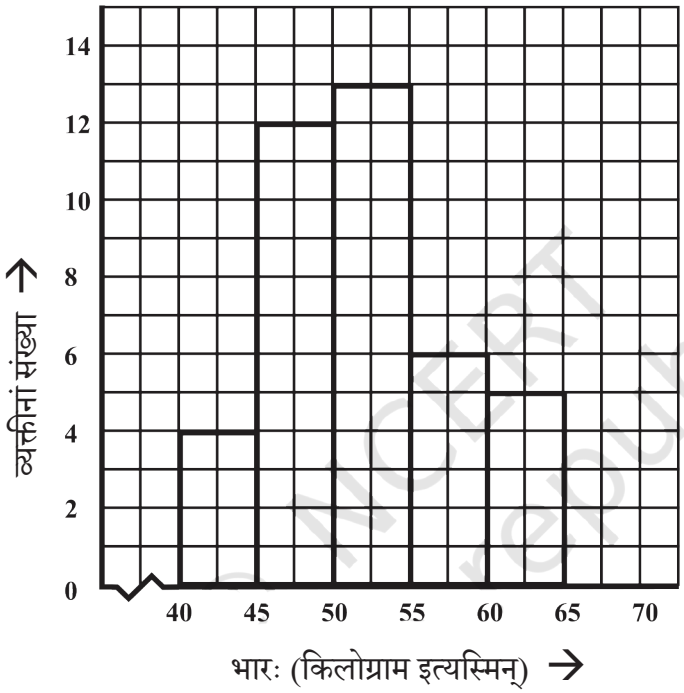
आकृतिः 15.3

15.1.3 आयत-चित्रम्

एकम् आयत-चित्रम् एकः दण्डालेखः इव भवति यः गणनाम् अन्तराले दर्शयति। अस्मिन् अन्तरालान् संलग्न-दण्डद्वारा प्रदर्शयति।

15.4 आकृतौ आयत-चित्रम् एकस्य क्षेत्रस्य 40 व्यक्तीनां भाराणां (किलोग्राम इत्यस्मिन्) बण्टनं दर्शयति।

भारः (किलोग्राम इत्यस्मिन्)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65
व्यक्तीनां संख्या	4	12	13	6	5



15.4 आकृत्यां, वयं 0-40 पर्यन्तं विद्यमानाः सङ्ख्याः न दर्शयामः इति सूचयितुं काचित् दन्तुर-रेखा, तिर्यग्-रेखायाः अनुदिशि प्रयुक्ता अस्ति।

ध्यानं ददतु दण्डानां मध्ये किमपि रिक्त-स्थानम् नास्ति यतो हि अन्तरालानां मध्ये अपि कश्चित् भेदः नास्ति। भवन्तः अस्मात् आयत-चित्रात् कां सूचनां प्राप्नुवन्ति ? तस्याः सूचनायाः एकां सूचीं निर्मापयन्तु।

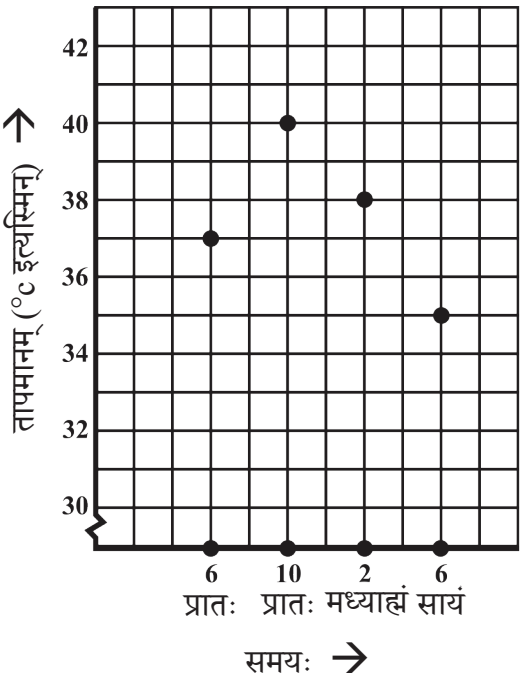
15.1.4 रेखा-आलेखः

एकः रेखा-आलेखः ईदृशीं गणनां प्रस्तौति या समयेन सह सततं परिवर्तमाना अस्ति। यदा रेणु रुग्णा जाता तदा तस्याः चिकित्सकः चतस्रः घण्टाः पश्चात् तस्याः शारीरिक-तापमानम् आकलितवान्। एतत् एकस्मिन् आलेखरूपे आसीत् (15.5 एवं 15.6 आकृतौ पश्यन्तु)।

वयम् एतत् " समय-तापमानम् " इति कथयितुं शक्नुमः।

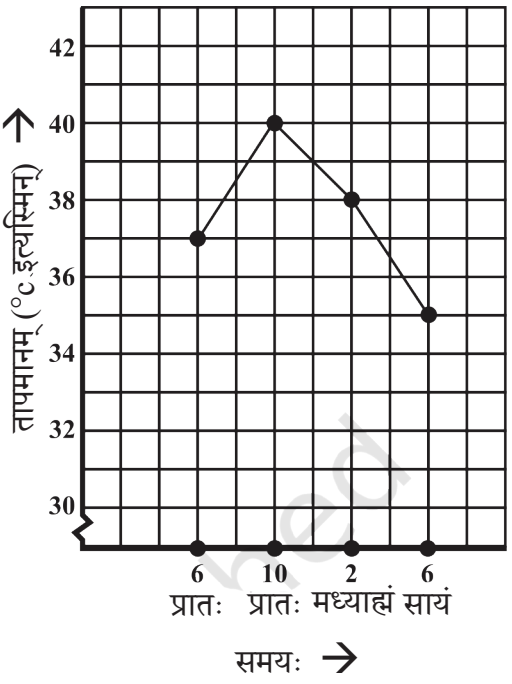
एतत् निम्नतालिकायां दत्त-गणनानां चित्ररूपे प्रदर्शनम् अस्ति।

समयः	6 वादने प्रातः	10 वादने प्रातः	6 वादने मध्याह्ने	6 वादने सायंकाले
तापमानम् (°c इत्यस्मिन्)	37	40	38	37



आकृतिः 15.5

प्रत्येकं गणनां वर्गाङ्कित-कर्गदोपरि एकबिन्दुद्वारा अङ्कितम् अस्ति।



आकृतिः 15.6

पश्चात् बिन्दून् रेखाखण्डेन साकं मेलितवान्। परिणामतः एषः रेखा-आलेखः अस्ति।

क्षैतिज-रेखा (अथवाx- अक्ष नाम्ना अपि ज्ञायते) सा समयं दर्शयति यदा - यदा तापमानस्य ग्रहणं भवति। ऊर्ध्वाधर-रेखा (अथवाy- अक्ष नाम्ना अपि ज्ञायते) इत्यस्यां किं प्रदर्शितम् अस्ति ?

एषः आलेखः भवन्तं किं किं ज्ञापयति ? उदाहरणाय भवन्तः अस्मिन् तापमानस्य प्रारूपं द्रष्टुं शक्नुवन्ति। प्रातः 10 वादने अधिकम् आसीत् पुनः सायं 6 वादनपर्यन्तं लघु अभवत्। ध्यानं ददतु प्रातः 6 वादनस्य तथा प्रातः 10 वादनस्य च मध्ये तापमानं 3°c (40°c-37°c) वर्धितम्।

प्रातः 8 वादने तापमानं न पठितं तथापि आलेखं दृष्ट्वा प्रतीयते यत् एतत् 37°c इत्यतः अधिकम् आसीत्। (कथम् ?)

उदाहरणम् 1 दत्त-आलेखः (आकृतिः 15.7) 2007 वर्षे A तथा B क्रीडकाभ्यां 10 क्रिकेट-क्रीडायां अर्जितान् धावनाङ्कान् प्रदर्शयति। आलेखस्य अध्ययनं कुर्वन्तु तथा निम्न-प्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) उभयोः अक्ष-रेखयोः का का सूचना प्रदत्ता अस्ति ?

(ii) का रेखा A क्रीडकेन अर्जितान् धावनाङ्कान् प्रदर्शयति।

(iii) 2007 तमे वर्षे किं कस्याम् अपि क्रीकेटक्रीडायाम् उभाभ्यां क्रीडकाभ्याम् अर्जिताः धावनाङ्काः समानाः आसन् ? यदि आम् तर्हि कस्यां क्रीकेट-क्रीडायाम् ?

(iv) उभयोः क्रीडकयोः कः स्थिरः अस्ति ? भवन्तः एतं निर्णयं कथं गृहीतवान् ?

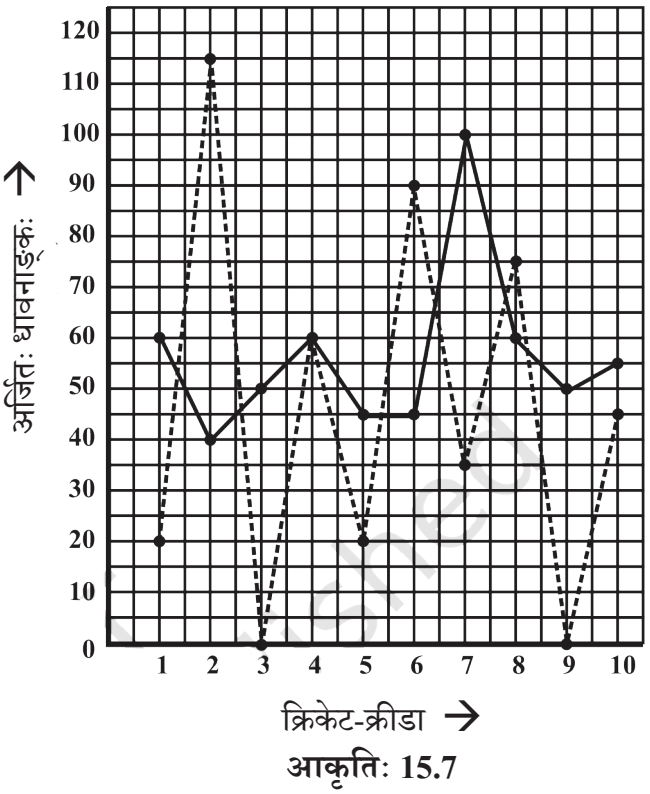
समाधानम्

(i) क्षैतिज-अक्षः (अथवा x- अक्षः) 2007 तमे वर्षे क्रीडमानानां क्रिकेट-क्रीडानां संख्यां प्रकटयति। ऊर्ध्वाधर-अक्षः (अथवा y- अक्षः) प्रत्येकं क्रिकेट-क्रीडायाम् अर्जितानां धावनाङ्कानां संख्यां प्रकटयति।

(ii) बिन्दुयुक्त-रेखा A क्रीडकेन अर्जितान् धावनाङ्कान् दर्शयति यथा आलेखस्य उपरि सङ्केतः अपि अस्ति

(iii) चतुर्थ-क्रीकेटक्रीडाक्रमे उभौ अपि समानं 60 इति धावनाङ्कम् अर्जितवन्तौ । (एतत् तेन बिन्दुना ज्ञायते यत्र उभे रेखे परस्परं प्रतिच्छेदयतः ।)

(iv) क्रीडकः A इत्यस्य आलेखे एकः उच्च-शिखरः अस्ति तथा अनेकाः निम्न-उपत्यकाः । सः धावनाङ्कं प्राप्तुं स्थिरः नास्ति । प्रत्युत अपर-पक्षे क्रीडकः B अपि कदापि 40 इत्यस्मात् न्यूनं धावनाङ्कं न प्राप्तवान् यद्यपि सः B इत्यस्य 115 धावनाङ्क-अपेक्षया अधिकतमं 100 इत्येव धावनाङ्कान् अर्जितवान् । A इति उभयोः क्रिकेट-क्रीडयोः शून्यं धावनाङ्कम् एव अर्जितवान् तथा आहत्य पञ्च-क्रिकेट-क्रीडासु 40 इत्यतः न्यूनम् । यतो हि A इत्यनेन अर्जितेषु धावनाङ्केषु अधिकतया उच्च-निम्न-पक्षाः सन्ति अतः B एव एकः विश्वसनीयः एवं स्थिरः क्रीडकः अस्ति ।



आकृतिः 15.7

उदाहरणम् 2 एकं कारयानम् एकस्मात् P इति नगरात् Q प्रति गच्छति यः परस्परं 350 किलोमीटरपरिमितस्य दूरे स्थितः अस्ति। प्रदत्त-आलेखः (आकृतिः 15.8) विभिन्न-समये कारयानस्य P नगरात् दूरीं प्रदर्शयति । आलेखस्य अध्ययनं कृत्वा निम्न-प्रश्नान् उत्तरन्तु ।

(i) उभयोः अक्षयोः किं - किं प्रदर्शितम् अस्ति ?

(ii) कारयानं कस्मिन् समये तथा कुतः यात्रां प्रारब्धवत् ?

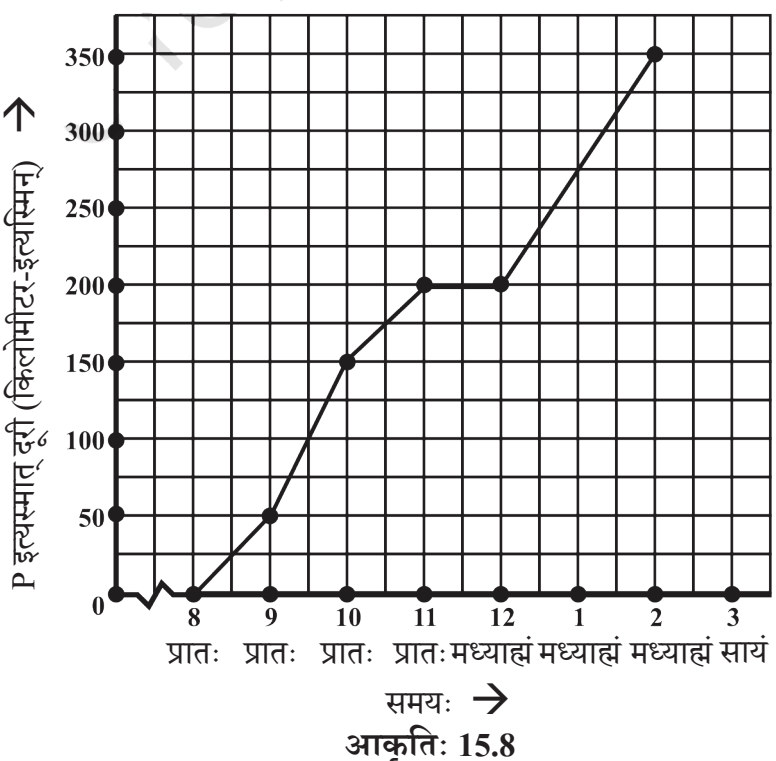
(iii) प्रथम-घण्टायां यानं कियत् दूरं गतवत् ?

(iv) द्वितीय-घण्टायां तृतीय-घण्टायाञ्च कारयानं कियत् पर्यन्तं दूरं गतवत् ?

(v) किं पूर्वं घण्टात्रयं कारयानस्य गतिः समाना आसीत् ? भवन्तः कथं ज्ञातवन्तः ?

(vi) किं कारयानं कदापि कस्य अपि स्थाने अस्थगयत् ?

(vii) कारयानं Q नगरे कस्मिन् समये प्राप्तवत् ?



आकृतिः 15.8

समाधानम्

(i) क्षैतिजः (x) इति अक्षः समयं दर्शयति । ऊर्ध्वाधरः (y) इति अक्षः P नगरात् कारयानस्य दूरीं दर्शयति ।

(ii) कारयानं 8 वादने प्रातः P नगरात् अचलत्।

(iii) कारयानं प्रथम-घण्टायां 50 km इति दूरम् आप्नोत्। (भवन्तः एवं द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् कारयानं प्रातः 8 वादने P नगरात् अचलत् तथा प्रातः 9 वादने आलेखानुसारं 50 km इति दूरम् आसीत्। अतः प्रातः 8 तथा 9 वादनमध्ये एकघण्टायां कारयानं 50 km दूरम् अगच्छत्।)

(iv) (a) कारयानं द्वितीय-घण्टायां (प्रातः 9 वादनात् 10 वादने) 100 km इति (150 - 50) प्राप्तवत्। (b) कारयानं तृतीय-घण्टायां (प्रातः 10 वादनात् 11 वादने) 50 km इति (200 - 150) प्राप्तवत्।

(v) (iii) तथा (iv) प्रश्नस्य उत्तरात् एवं जानीमः यत् कारयानस्य गतिः सदैव समाना न आसीत्। (आलेखः एतत् अपि प्रदर्शयति यत् गतिः कथं प्रवर्तमाना अभवत्।)

(iv) आलेखे वयं पश्यामः यत् कारयानं प्रातः 11 वादने तथा 12 वादने अपि P नगरात् 200 km इति दूरे आसीत्। अस्मिन् अन्तराले प्राप्त-दूरी एकः क्षैतिज-रेखाखण्डः अस्ति यः अस्य तथ्यस्य पुष्टिं करोति।

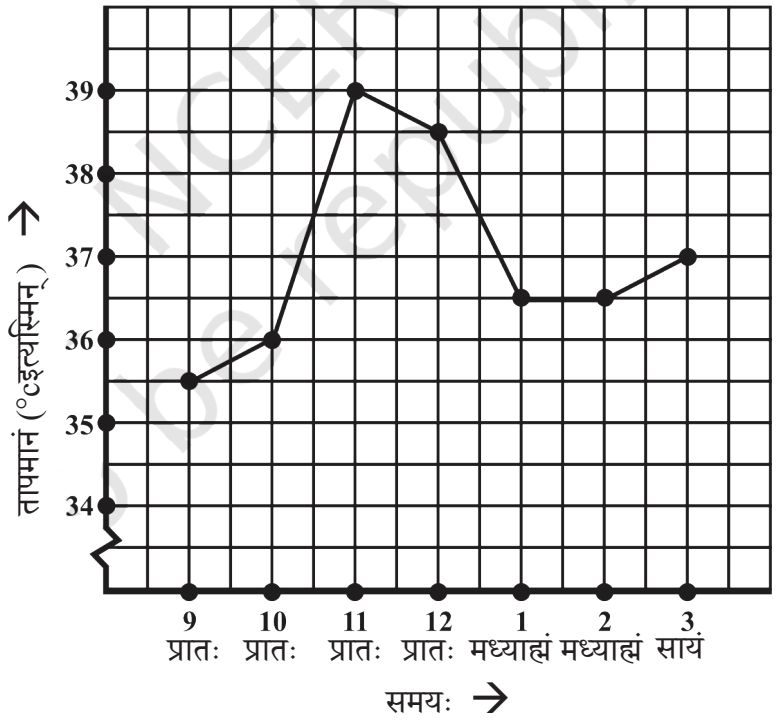
(vii) 2 वादने मध्याह्ने कारयानं Q इति नगरं प्राप्तवत्।

प्रश्नावली 15.1

1. निम्न-आलेखः कस्मिंश्चित् चिकित्सालये एकस्य रुग्णस्य प्रति घण्टायां गृहीतं तापमानं दर्शयति।

(a) रुग्णस्य तापमानं मध्याह्ने 1 वादने किम् आसीत् ?

(b) रुग्णस्य तापमानं 38.5°c कदा आसीत् ?



(c) अस्मिन् सम्पूर्णे अन्तराले रुग्णस्य तापमानम् आहत्य द्विबारं एकसमानम् एव आसीत्। एतौ द्वौ समयौ कौ स्तः ?

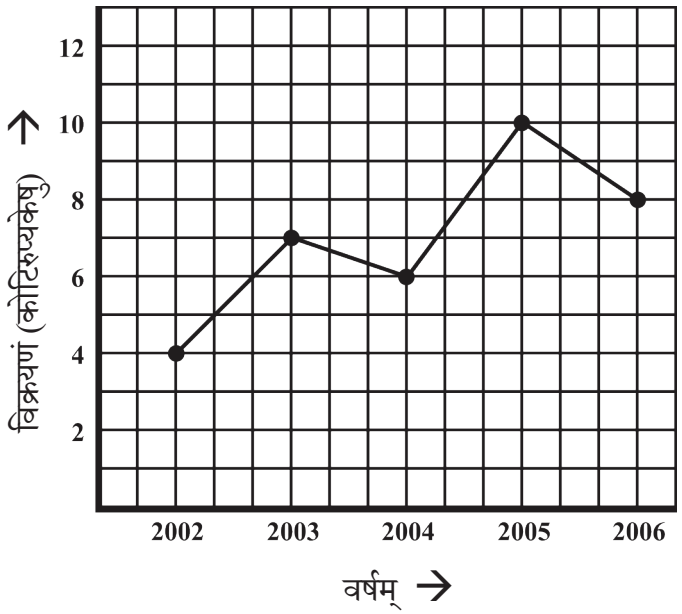
(d) मध्याह्ने 1.30 वादने रुग्णस्य तापमानं किम् आसीत् ? अस्मिन् निष्कर्षे भवन्तः कथं गतवन्तः ?

(e) कस्मिन् अन्तराले रुग्णस्य तापमानं ' वर्धनस्य आकर्षणं ' दर्शयति।

2. एकः निर्माता उद्योगगृहस्य विभिन्न-वर्षेषु कृतविक्रयणं निम्न-आलेखेन प्रदर्शितम् अस्ति।

(a) (i) 2002 वर्षे (ii) 2006 वर्षे कियत् विक्रयणं जातम् ?

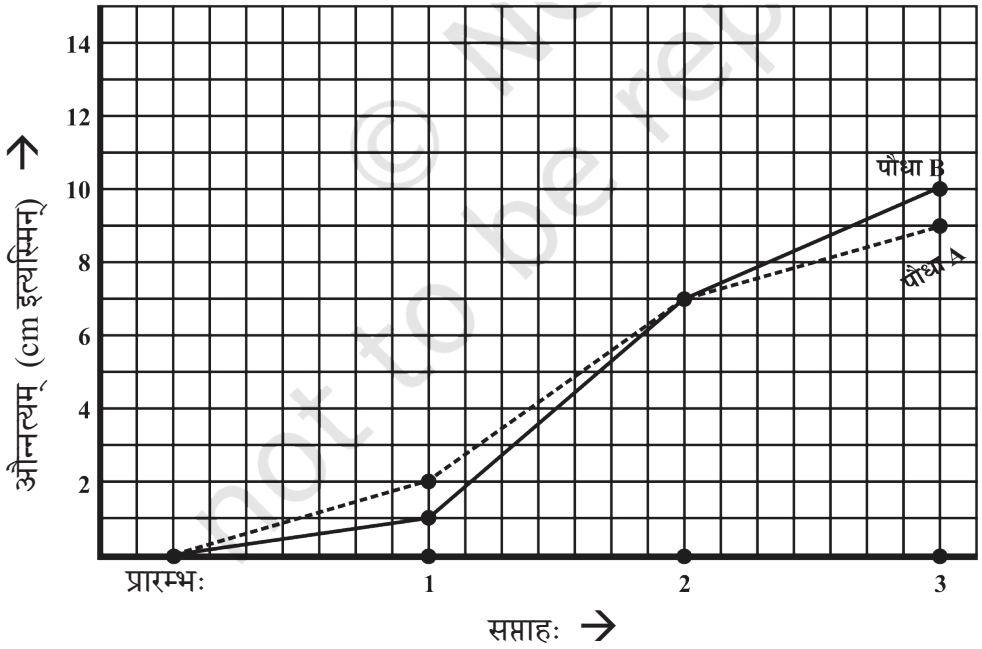
(b) (i) 2003 वर्षे (ii) 2005 वर्षे कियत् विक्रयणं जातम् ?



(c) 2002 वर्षे तथा 2006 वर्षस्य विक्रयणे कियान् भेदः आसीत् ?

(d) कस्मिन् अन्तराले विक्रयणस्य भेदः सर्वाधिकः आसीत् ?

3. वनस्पति-विज्ञानस्य एकस्मिन् प्रयोगे समान-प्रयोगशाला-परिस्थितिषु पादपद्वयं A तथा B प्ररोपितं । सप्ताहत्रयं यावत् तस्य औन्नत्यं प्रत्येकं सप्ताहस्य अन्ते मापितम् । परिणामः निम्न-आलेखे प्रदर्शितः अस्ति ।



(a) (i) 2 सप्ताहं पश्चात् (ii) 3 सप्ताहं पश्चात् A इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् आसीत् ?

(b) (i) 2 सप्ताहं पश्चात् (ii) 3 सप्ताहं पश्चात् B इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् आसीत् ?

(c) तृतीये सप्ताहेA इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् वर्धितम् ?

(d) द्वितीयसप्ताहस्य अन्तात् तृतीयसप्ताहस्य अन्त-पर्यन्तं B इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् वर्धितम् ?

© NCERT not to be republished

(e) कस्मिन् सप्ताहे A इति पादपस्य औन्नत्यं सर्वाधिकं वर्धितम् ?

(f) कस्मिन् सप्ताहे B इति पादपस्य औन्नत्यं न्यूनं वर्धितम् ?

(g) किं कस्मिन् अपि सप्ताहे उभयोः पादपयोः औन्नत्यं समानम् आसीत् ? परिचिन्वन्तु ।

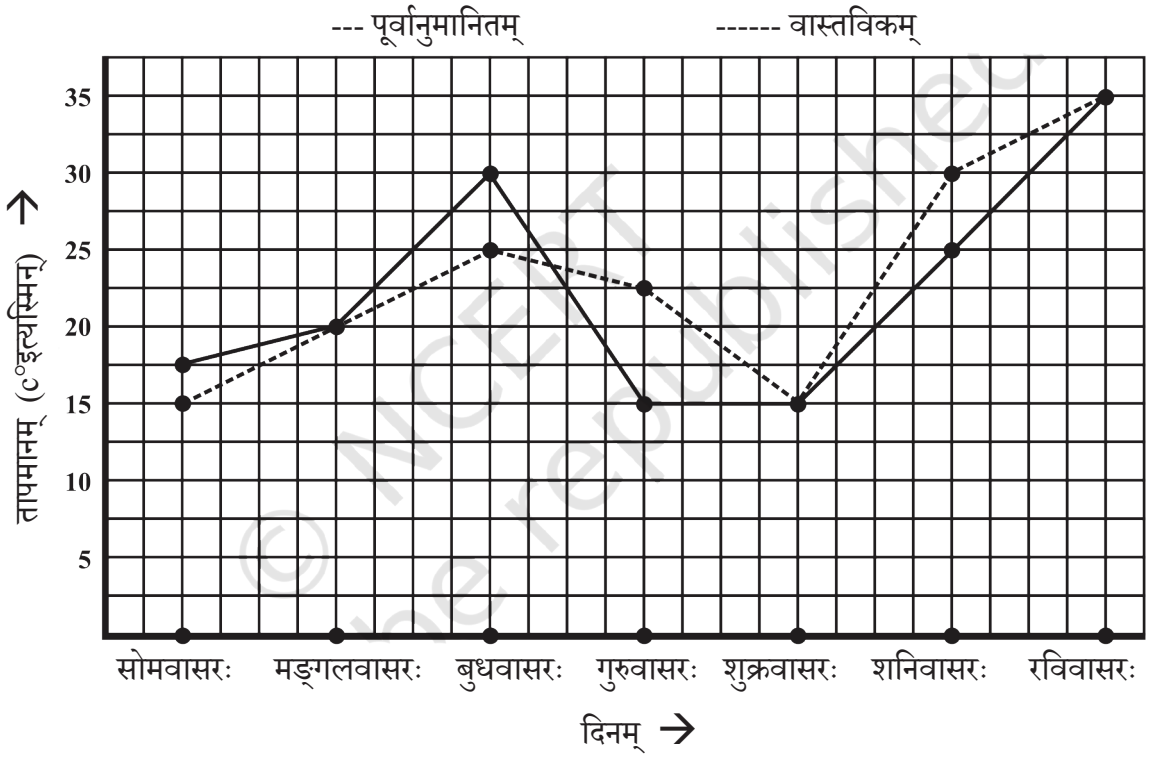
4. निम्न-आलेखः कस्य अपि सप्ताहस्य प्रत्येकं दिनस्य कृते पूर्वानुमानित-तापमानं तथा वास्तविकं तापमानं दर्शयति ।

(a) कस्मिन् दिने पूर्वानुमानित-तापमानं तथा वास्तविकं तापमानं समानम् आसीत् ?

(b) सप्ताहे पूर्वानुमानितम् अधिकतमं तापमानम् किम् आसीत् ?

(c) सप्ताहे वास्तविकं न्यूनतमं तापमानं किम् आसीत् ?

(d) कस्मिन् दिने वास्तविक-तापमाने तथा पूर्वानुमानित- तापमाने भेदः सर्वाधिकः आसीत् ?



5. निम्न-तालिकायाः प्रयोगं कृत्वा एकं रैखिक-आलेखं निर्मापयन्तु -

(a) विभिन्न-वर्षेषु कस्मिन् अपि पर्वतीय-नगरे हिमपातस्य दिनानां संख्याः

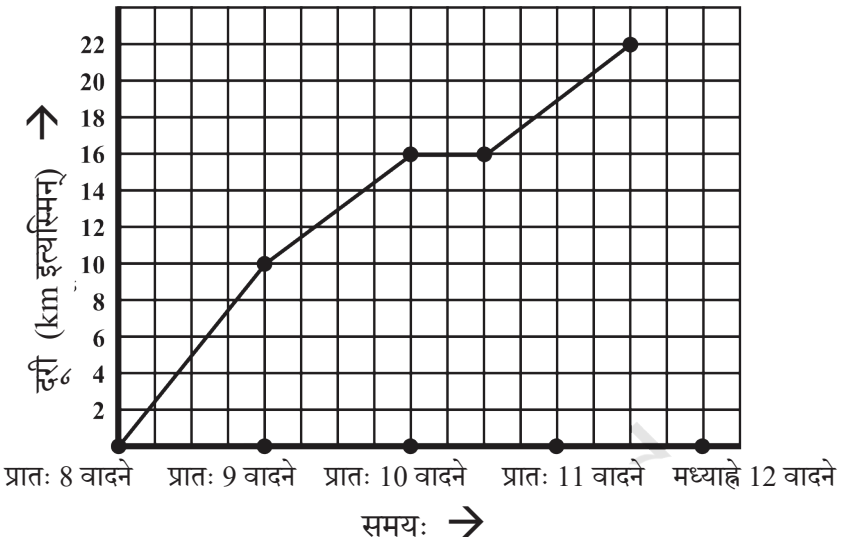
वर्षम्	2003	2004	2005	2006
दिनम्	8	10	5	12

(b) विभिन्न-वर्षेषु एकस्मिन् ग्रामे पुरुषाणां स्त्रीणां संख्या (सहस्रेषु)

वर्षम्	2003	2004	2005	2006	2007
पुरुषाणां संख्या	12	12.5	13	13.2	13.5
स्त्रीणां संख्या	11.3	11.9	13	13.6	12.8

© NCERT not to be republished

6. एकः पत्रवाहकः कस्यचित् नगरस्य पार्श्व-स्थित-उपनगरे एकस्मै व्यापारिणे सामग्रीं दातुं द्विचक्रिका-वाहनेन (साईकिल-यानम्) गच्छति। विभिन्नेषु समयेषु नगरात् तस्य दूरी निम्न-आलेखे प्रदर्शिता अस्ति।



(a) x-अक्षे समयं दर्शयितुं कस्य मानदण्डस्य प्रयोगः अस्ति ?

(b) सः सम्पूर्णां यात्रां पूरयितुं कियन्तं समयं गृहीतवान् ?

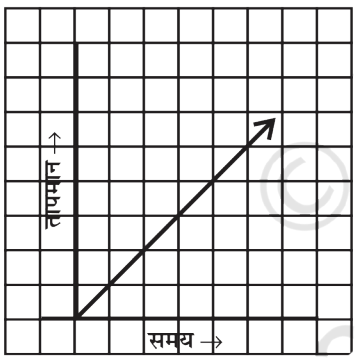
(c) व्यापारिणः स्थलस्य दूरी नगरात् कियत् वर्तते ?

(d) किं पत्रवाहकः मार्गे कुत्रापि स्थगितवान् ? विवरणं ददतु।

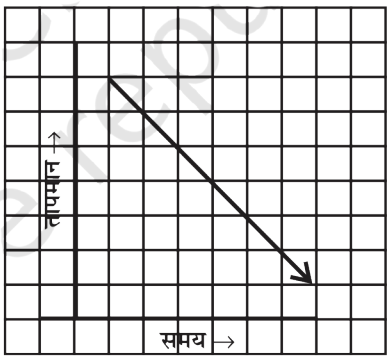
(e) कस्मिन् अन्तराले तस्य गतिः अधिका अस्ति ?

7. निम्न-आलेखेषु के-के आलेखाः समय-तापमानयोः मध्ये सम्भवाः सन्ति ? तर्केण सह स्वकीयम् उत्तरं ददतु।

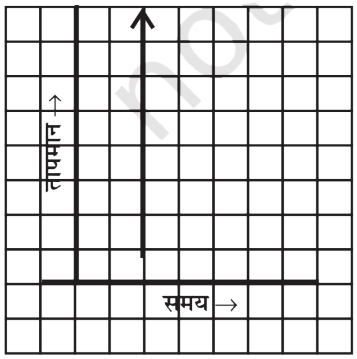
(i)



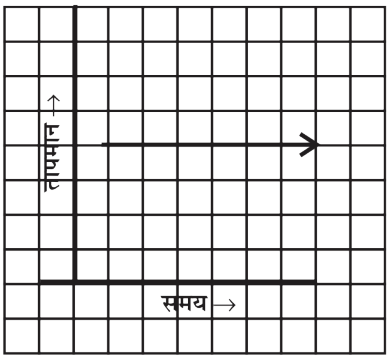
(ii)



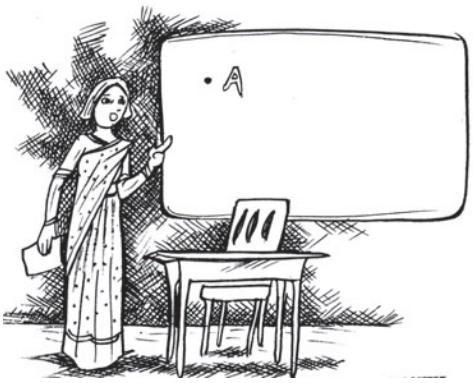
(iii)



(iv)



15.2 रैखिक - आलेखः



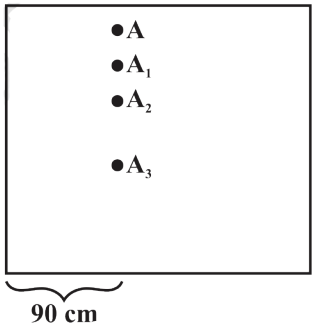
रेखा-आलेखः अनेक-रेखाखण्डान् परस्परं संयोज्य निर्मीयते। कदाचित् एषः आलेखः एका सम्पूर्णा अखण्डित-रेखा अपि भवितुं शक्नोति। एतादृशः आलेखः रैखिक-आलेखः उच्यते। एतादृशम् आलेखं निर्मातुं वयं वर्गाङ्कित-कर्गदे कांश्चन बिन्दून् अङ्कयामः। साम्प्रतं वयं शिक्षयिष्यामः यत् वर्गाङ्कित-कर्गदे बिन्दुः सरलतया कथं अङ्कितः भवति।

15.2.1 बिन्दोः स्थितिः

अध्यापिका श्यामपट्टे एकं बिन्दुम् अङ्कितवती पुनः सा स्व छात्रेभ्यः पृष्टवती यत् ते तस्य श्यामपट्टे स्थितिं कथं अङ्कयिष्यन्ति ? एतादृशात् प्रश्नात् अनेकानि उत्तराणि आगतानि (आकृतिः 15.9)।

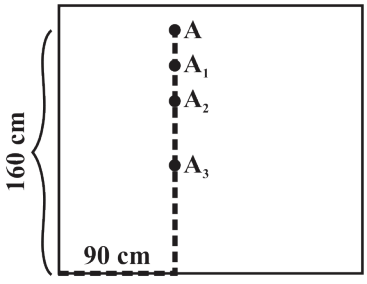
आकृतिः 15.9

किम् एतेषु कमपि कथनं बिन्दोः स्थितिं सम्यक्तया निश्चितं करोति ? न कमपि न। किमर्थम् ? अस्मिन् विषये विचिन्तयन्तु। तदा जॉनः एकं परामर्शं दत्तवान्। सः बिन्दोः दूरीं श्यामपट्टस्य वामभागात् परिमाप्य कथितवान् "एषः बिन्दुः श्यामपट्टस्य वामभागात् 90 सेण्टीमीटरपरिमितं दूरे अस्ति।" किं भवन्तः अवगच्छन्ति यत् तस्य परामर्शः समीचीनः अस्ति ? (आकृतिः 15.10)



आकृतिः 15.10

A, A_1, A_2, A_3 सर्वे बिन्दवः वामभागात् 90 cm दूरे अस्ति।



आकृतिः 15.11

बिन्दुः Aवामभागात् 90 cm तथा निम्नभागात् 160 cm दूरे अस्ति।

तदा रेखा कथनं संशोध्य उक्तवती "एषः बिन्दुः श्यामपट्टस्य वामभागात् 90 cm तथा निम्नभागात् 160 cm इत्यस्मिन् स्थितः अस्ति।" एवं रीत्या समस्यायाः सम्यक् समाधानं कुर्वन्ति (आकतिः 15.11)। तदा अध्यापकः ज्ञापितवान् "वयं बिन्दोः स्थितिं एवं (90, 160) लेखित्वा प्रकटयामः।" किं बिन्दुः (160, 90) बिन्दुः (90, 160) इत्यस्मात् विभिन्नः भविष्यति ? अस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

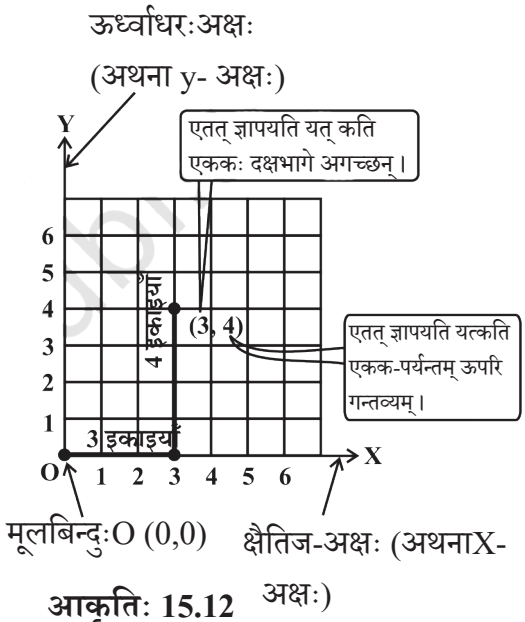
एवं कथ्यते यत् सप्तदश-शताब्द्यां गणितज्ञः रेने दकार्तः एकां पिपिलिकां छदेः कोणस्य पार्श्वे चलन्तीं दृष्टवान् तथा तले एकस्य बिन्दोः स्थितेः निर्धारणविषये चिन्तितुम् आरब्धवान्। क्षैतिजः ऊर्ध्वाधरश्च एताभ्यां रेखाभ्यां प्रदत्त-बिन्दोः दूरीद्वयं परिमाप्य स्थितेः प्रकटकरणस्य विधिः तस्य सम्माने अद्य 'कार्तीय-विधिः' नाम्ना संज्ञायते।

15.2.2 निर्देशाङ्कः

कल्पनां कुर्वन्तु यत् भवन्तः कस्मिंश्चित् चलचित्रमन्दिरे गच्छन्ति तथा स्वकीयम् आरक्षितम् आसन्दम् अन्वेषयन्ति । अस्य कृते द्वे संख्ये भवितव्ये पङ्क्ति-संख्या तथा आसन्द-संख्या। कस्मिन् अपि तले बिन्दोः स्थितिं निर्धारितुम् अयम् एव आधारः अस्ति।

15.12 आकृतौ ध्यानं ददतु यत् बिन्दुः (3, 4) यस्य दूरी वामभागात् 3 एककः तथा निम्नप्रान्तभागात् 4 एककः अस्ति , वर्गाङ्किते कर्गदे केन प्रकारेण अङ्कितः अस्ति।

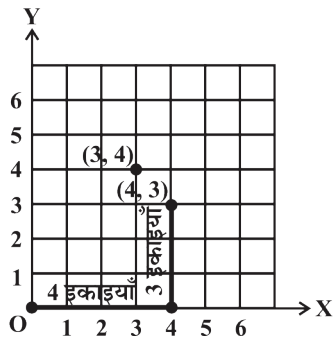
आलेखीयकर्गदम् अपि एकं वर्गाङ्कितं कर्गदम् एव अस्ति । अस्मिन् x- अक्षं तथा y-अक्षं सौविध्यानुसारं दर्शयामः तथा पुनः तस्मिन् बिन्दोः स्थितिं निर्धारयामः । 3 संख्या बिन्दोः x-निर्देशाङ्कः तथा y-निर्देशाङ्कः उच्यते । एवं रीत्या वयं कथयामः यत् (3, 4) बिन्दोः निर्देशाङ्कौ स्तः ।



आकृतिः 15.12

उदाहरणम् 3 एकस्मिन् आलेखे बिन्दुः (4, 3) इति अङ्कयन्तु। किम् एषः सः एव बिन्दुः वर्तते यः (3, 4) प्रदर्शयति ?

समाधानम् - वर्गाङ्कित-कर्गदे अस्मिन् x- अक्षं तथा y-अक्षं निर्धारयन्तु। (वास्तविकतया एताः संख्या-रेखाः एव सन्ति।) मूलबिन्दुः (0, 0) इत्यतः प्रारभ्यताम्। 4 एककः दक्षपक्षतः चलित्वा पुनः 3 एककः ऊपरि गच्छेयुः चेत् भवन्तः (3, 4) बिन्दुं प्राप्नुवन्ति। 15.13 इति आकृतिं दृष्ट्वा भवन्तः बोधितुं शक्नुवन्ति यत् (4, 3) बिन्दुः तथा (3, 4) इति बिन्दुः पृथक् - पृथक् अस्ति।



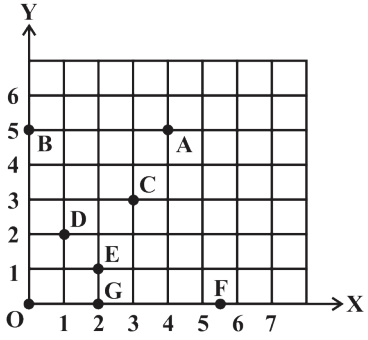
आकृतिः 15.13

उदाहरणम् 4 - 15.14 आकृतिं दृष्ट्वा निम्न-बिन्दूनां स्थितये उपयुक्तम् अक्षरं चिन्वन्तु।

(i) (2, 1) (ii) (0, 5) (iii) (2, 0)

तथा लिखन्तु -

(iv) A बिन्दोः निर्देशाङ्कः (v) F बिन्दोः निर्देशाङ्कः



आकृतिः 15.14

समाधानम् -

(i) (2, 1) अस्ति E बिन्दुः (D इति न विचिन्तयन्तु)।

(ii) (0, 5) अस्ति B बिन्दुः (कथम् ? इति मित्रैः सह चर्चयन्तु)।

(iii) (2 , 0) अस्ति G बिन्दुः ।

(iv) बिन्दुः A इत्यस्य निर्देशाङ्कौ स्तः (4, 5)।

(v) बिन्दुः F इत्यस्य निर्देशाङ्कौ स्तः (5.5, 0)।

उदाहरणम् 5 निम्न-बिन्दून् वर्गाङ्कित-कर्गदे अङ्कयन्तु तथा पश्यन्तु यत् किं ते सर्वे एकस्याम् एव सरल-रेखायां सन्ति यदि सन्ति तर्हि तस्याः रेखायाः नाम वदन्तु।

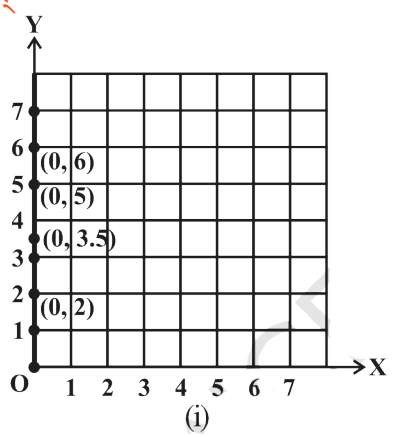
(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)

(ii) A (1, 1), B(1, 2), C(1, 3), D(1, 4)

(iii) K (1, 3), L(2, 3), M(3, 3), N(4, 3)

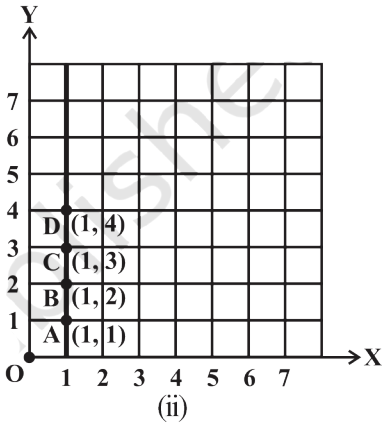
(iv) W (2, 6), X(3, 5), Y(5, 3), Z(6, 2)

समाधानम् -



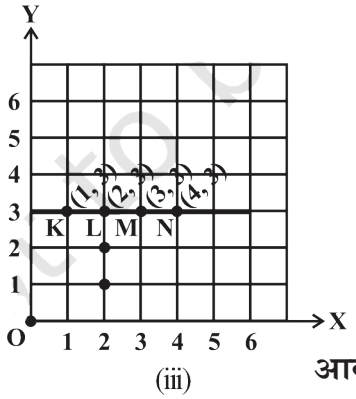
(i)

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। सा अस्ति - y-अक्षः

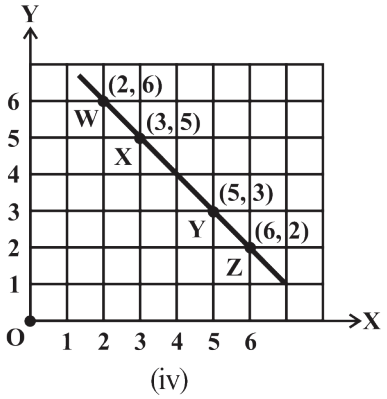


(ii)

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। एषा AD रेखा अस्ति (भवन्तः एतां किञ्चित् भिन्नं नाम अपि दातुं शक्नोति।) y-अक्षस्य समान्तरीया वर्तते।



(iii)



(iv)

आकृतिः 15.15

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। वयम् एतां KL अथवा KM अथवा MN आदि नाम दातुं शक्नुमः। एषा x- अक्षस्य समान्तरीया वर्तते।

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। वयम् एतां XY अथवा WY अथवा YZ इति नाम दातुं शक्नुमः।

ध्यानं ददतु यत् उपरि प्रदत्ते प्रत्येकम् उदाहरणे अङ्कितबिन्दूनां मेलने सति प्राप्त-आलेखः एका सरल-रेखा अस्ति। एतादृशाः आलेखाः रैखिक-आलेखाः इति उच्यन्ते।

प्रश्नावली 15.2

1. निम्न-बिन्दून् एकस्मिन् वर्गाङ्कित-कर्गदे अङ्कयन्तु तथा परीक्षन्तु यत् किं ते सर्वे एकस्यां सरल-रेखायां स्थिताः सन्ति ?

   (a) A (4, 0), B (4, 2), C(4, 6), D (4, 2.5)

   (b) P (1, 1), Q (2, 2), R(3, 3), S (4, 4)

   (c) K (2, 3), L (5, 3), M(5, 5), N (2, 5)

2. (2, 3) तथा (3, 2) बिन्दुमध्यतः गच्छन्तीम् एकां सरलां रेखां रचयन्तु। तेषां बिन्दूनाम् एकं निर्देशाङ्कं लिखन्तु यस्मिन् एषा रेखा

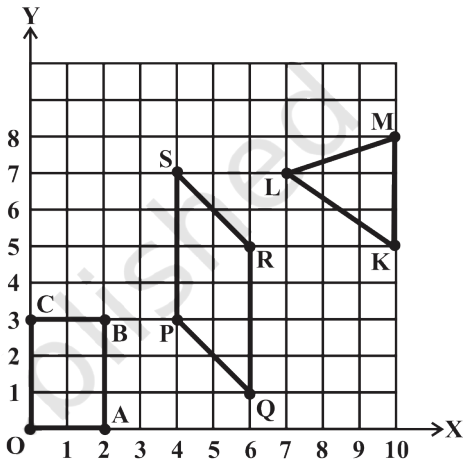
3. आलेखे निर्मितासु आकृतिषु प्रत्येकं शीर्षस्य निर्देशाङ्कं लिखन्तु।

4. निम्नलिखित-कथनेषु किं सत्यं किम् असत्यं ? असत्यं समीचीनं कुर्वन्तु ?

   (i) कश्चित् बिन्दुः यस्य x- निर्देशाङ्कः शून्यः अस्ति तथा y- निर्देशाङ्कः शून्येतरः अस्ति y- अक्षे स्थितः भवति।

   (ii) कश्चित् बिन्दुः यस्य y- निर्देशाङ्कः शून्यः अस्ति तथा x- निर्देशाङ्कः 5 अस्ति y- अक्षे स्थितः भविष्यति।

   (iii) मूल बिन्दोः निर्देशाङ्कौ (0, 0) स्तः।



Published

15.3 कश्चित् अनुप्रयोगः

दैनिक-जीवने भवन्तः दृष्टवन्तः यत् कस्याः अपि सुविधायाः यावत् अधिकम् उपयोगं भवन्तः कुर्वन्ति तावत् अधिकं तस्य कृते मूल्यम् अपि दातुं भवति। यदि भवन्तः विद्युतः उपयोगम् अधिकं कुर्वन्ति तदा भवता अधिकः धनराशिः देयः भवति यदि भवन्तः विद्युतः उपयोगं न्यूनं कुर्वन्ति तदा देयः धनराशिः अपि न्यूनः भवति। एतत् एकम् उदाहरणम् अस्ति यत्र एकः राशिः अपरं प्रभावयति। विद्युतः देयधनराशिः उपभुक्त-विद्युतः मात्रायाम् आश्रितः भवति। वयं कथयामः यत् विद्युतः मात्रा मुक्तः अथवा स्वतन्त्र-चरः अस्ति प्रत्युत विद्युतः देयः धनराशिः एकः आश्रितः चरः अस्ति। एतादृशानां राशीनां सम्बन्धं वयम् आलेखद्वारा अपि प्रदर्शितुं शक्नुमः।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

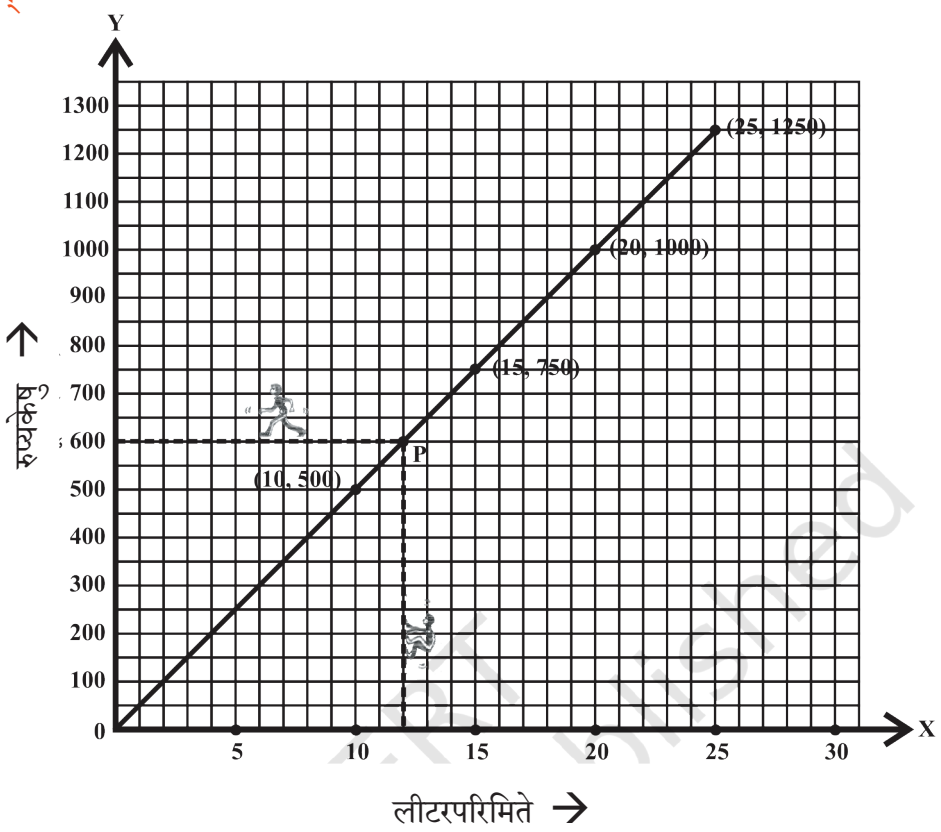
एकस्य कारयानस्य भू-तैल (पेट्रोल) कोषं पूरणार्थं दत्तराशिः क्रीतभूतैलस्य मात्रया (लीटर-परिमिते) निश्चितः भवति। अत्र कः चरः स्वतन्त्र-चरः अस्ति ? चर्चयन्तु।

उदाहरणम् 6 (मात्रा तथा मूल्यम्) निम्न-तालिका भू-तैलस्य मात्रां तथा तस्य मूल्यं ज्ञापयति।

भू-तैलस्य मात्रा (लीटर-परिमिते)	10	15	20	25
भू-तैलस्य मूल्यं (रुप्यकेषु)	500	750	1000	1250

एताः गणनाः प्रदर्शयितुम् आलेखनिर्माणं कुर्वन्तु -

समाधानम्



आकृतिः 15.16

(i) आगच्छन्तु उभयोः पक्षयोः कृते (आकृतिः 15.16) उपयुक्तं मानदण्डं चिन्वन्तु।

(ii) क्षैतिज-अक्षे भू-तैलस्य मात्रां प्रदर्शयामः।

(iii) ऊर्ध्वाधर-अक्षे मूल्यं प्रदर्शयामः।

(iv) (10,500), (15,750), (20,1000) तथा (25,1250) बिन्दून् अङ्कयन्तु।

(v) बिन्दून् मेलयन्तु।

वयं पश्यामः यत् आलेखे एका सरला रेखा अस्ति। (एषः एकः रैखिक-आलेखः अस्ति) एषः आलेखः मूलबिन्दूतः कथं गच्छति ? एतस्मिन् विषये विचिन्तयन्तु।

एषः आलेखः अस्माकं कृते केषाञ्चन तथ्यानां विषये अनुमानं कर्तुं सहायकः भवितुम् अर्हति। स्वीकुर्वन्तु यत् वयं ज्ञातुम् इच्छामः यत् 12 लीटर-परिमितं भूतैलस्य कृते कियत् मूल्यं देयं भविष्यति ?

क्षैतिज-अक्षे 12 इत्यस्य स्थितिं पश्यन्तु। 12 इत्यस्य चिह्ने ऊर्ध्वाधर-रेखायाः अनुकूलं गत्वा तम् आलेखं P बिन्दौ मेलयामः।

P बिन्दुतः क्षैतिज-रेखायाः अनुकूलं गत्वा ऊर्ध्वाधर-अक्षं प्राप्नुमः यत्र वयं तं बिन्दुं प्राप्नुमः यः 600 रुप्यकं प्रदर्शयति।

एषः आलेखः एतादृशेः स्थितेः अस्ति यस्मिन् उभौ राशी समानुपातौ स्तः। कथम् ? एतादृश्यां स्थित्यां आलेखः सर्वदा रैखिकः एव भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

ऊपरोक्त-उदाहरणे , आलेखात् जानन्तु यत् 800 रुप्यकेषु कियत् मात्रं भू-तैलं क्रेतुं शक्नुमः ?

उदाहरणम् 7 (मूलधनं सामान्यकुसीदश्च)

एकः वित्तकोषः वरिष्ठ - नागरिकान् तेषां सञ्चित-धने 10% साधारणं कुसीदं ददाति । सञ्चितं धनं तथा तस्मिन् अर्जित-वार्षिक-साधारण-कुसीदस्य सम्बन्धं दर्शयितुम् एकम् आलेखं रचयन्तु । अस्मात् आलेखात् निम्नं जानन्तु ।

(a) 250 रुप्यकं सञ्चिते सति तस्मिन् लब्धः कुसीदः ।

(b) 70 रुप्यकं कुसीदं प्राप्तुं कियत् धनं सञ्चितं कर्तुं भविष्यति ।

सञ्चित-धनम्	1 वर्षाय साधारण-कुसीदः
100 रुप्यकम्	$\frac{100\times1\times10}{100}$ =10 रुप्यकम्
200 रुप्यकम्	$\frac{200\times1\times10}{100}$ =20 रुप्यकम्
300 रुप्यकम्	$\frac{300\times1\times10}{100}$ =30 रुप्यकम्
500 रुप्यकम्	$\frac{500\times1\times10}{100}$ =50 रुप्यकम्
1000 रुप्यकम्	100 रुप्यकम्

उपयुक्त-चरणम्

1. अङ्कितायमानं राशिं सञ्चित-धनं तथा तस्मात् अर्जितं कुसीदं जानन्तु ।
2. x- अक्षः तथा y-अक्षः इत्यनयोः प्रदर्शितमानं राशिं निर्धारयन्तु ।
3. उपयुक्तं मानदण्डं चिन्वन्तु ।
4. बिन्दुम् अङ्कयन्तु ।
5. बिन्दून् मेलयन्तु ।

एतेभ्यः राशिभ्यः निम्न-तालिकां प्राप्नुमः -

सञ्चित-धनम् (रुप्यकेषु)	100	200	300	500	1000
वार्षिक-साधारण-कुसीदः (रुप्यकेषु)	10	20	30	50	100

(i) मानदण्डः - क्षैतिज-अक्षे 1 एककः = 100 रुप्यकम्
क्षैतिज-अक्षे 1 एककः = 10 रुप्यकम्

(ii) सञ्चित-धनं क्षैतिज-अक्षे प्रदर्शयामः ।

(iii) साधारण-कुसीदम् ऊर्ध्वाधर-अक्षे दर्शयामः ।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50), तथा (1000, 100) बिन्दून् अङ्कयन्तु ।

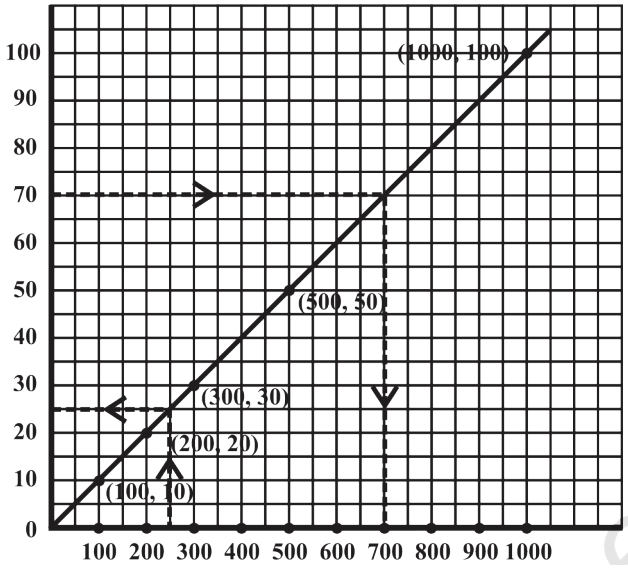
(v) बिन्दून् मेलयन्तु । वयम् आलेखे एकां सरलां रेखां प्राप्नुमः - (आकृतिः 15.17) ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

किम् उदाहरण-संख्या 7 एकस्य समानुपातस्य उदाहरणम् अस्ति ?

(a) क्षैतिज-अक्षे 250 रुप्यकात्मक-मूलधनाय ऊर्ध्वाधर-अक्षे 25 रुप्यकस्य सामान्यः कुसीदः अस्ति ।

(b) ऊर्ध्वाधर-अक्षे 70 रुप्यकस्य कुसीदाय क्षैतिज-अक्षे 700 रुप्यकात्मकं मूलधनम् अस्ति ।



आकृतिः 15.17

उदाहरणम् 8 (समयः दूरी च) अजीतः निरन्तरं 30 किलोमीटरपरिमितं प्रति घण्टां स्कूटरयानं चालयति। एतस्यै स्थित्यै दूरी-समययोः मध्ये एकम् आलेखं रचयन्तु। अनेन आलेखेन जानन्तु।

(i) अजीताय 75 किलोमीटरपर्यन्तं दूरं गमनाय योज्यमानः समयः।

(ii) अजीतेन $3\frac{1}{2}$ घण्टात्मके समये प्राप्ता दूरी।

समाधानम्

यात्रायाः घण्टाः	**प्राप्ता दूरी**
1 घण्टा	30 km
2 घण्टे	$2 \times 30 = 60$km
3 घण्टाः	$3 \times 30 = 90$km
4 घण्टाः	$4 \times 30 = 120$km

एतैः राशिभिः निम्न-तालिका प्राप्यते -

समयः (घण्टासु)	1	2	3	4
प्राप्ता दूरी (किलोमीटर-परिमिते)	30	60	90	120

(i) मानदण्डः - क्षैतिज-अक्षः 2 एककः = 1 घण्टा

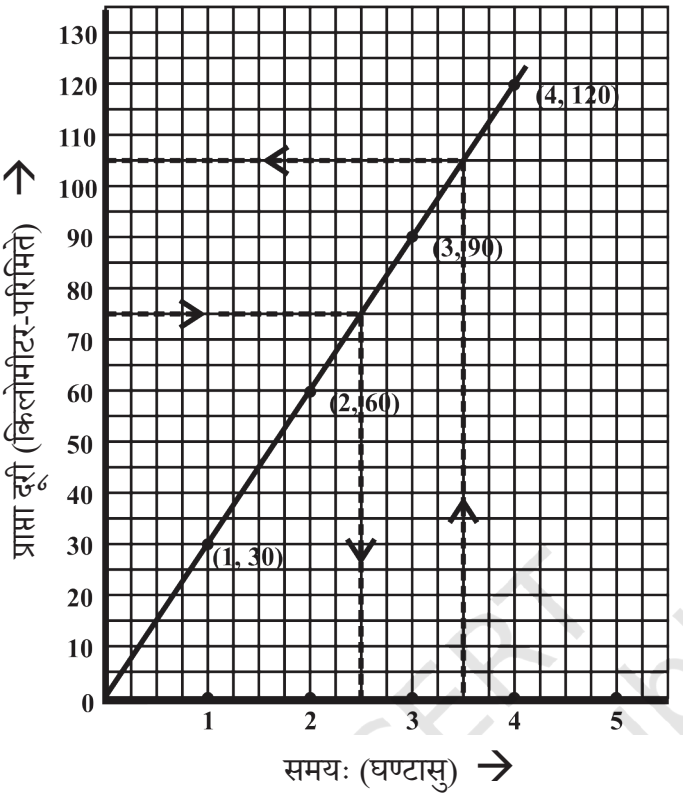
क्षैतिज-अक्षः 1 एककः = 10 किलोमीटर-परिमितम्

(ii) क्षैतिज-अक्षे समयं प्रदर्शयामः।

(iii) ऊर्ध्वाधर-अक्षे दूरीं दर्शयामः।

(iv) (1, 30) (2, 60) (3, 90) तथा (4,120) बिन्दून् अङ्कयन्तु।

(v) बिन्दून् मेलयन्तु। वयम् एकां रैखिक-आलेखं प्राप्नुमः - (आकृतिः 15.18)।



(a) ऊर्ध्वाधर-अक्षे 75 किलोमीटरपरिमितस्य दूरे तस्य अनुरूप-क्षैतिज-अक्षे 2.5 घण्टाः लगिष्यन्ति।

(b) क्षैतिज-अक्षे $3\frac{1}{2}$ घण्टा-अनुरूपे ऊर्ध्वाधर-अक्षे 105 किलोमीटरस्य दूरी प्राप्यते।

प्रश्नावली 15.3

1. उपयुक्त-मानदण्डस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्न-तालिकायां दत्त-राशीनां कृते आलेखं रचयन्तु।

(a) सेबफलानां मूल्यम्

सेबफलानां संख्या	1	2	3	4	5
मूल्यम् (रुप्यकेषु)	5	10	15	20	25

(b) कारयानेन प्राप्ता दूरी -

समयः (घण्टासु)	प्रातः 6 वादने	प्रातः 7 वादने	प्रातः 8 वादने	प्रातः 9 वादने
दूरी (किलोमीटरपरिमिते)	40	80	120	160

(i) प्रातः 7.30 वादनतः 8 वादनान्तराले कारयानेन कियत् दूरी प्राप्ता ?

(ii) कारयानस्य 100 किलोमीटरपरिमितं दूरी प्राप्ते सति समयः कः आसीत् ?

(c) सञ्चित-धने वार्षिकः कुसीदः -

सञ्चित-धनम् (रुप्यकेषु)	1000	2000	3000	4000	5000
साधारण-कुसीदः (रुप्यकेषु)	80	160	240	320	400

(i) किम् आलेखः मूल-बिन्दुतः गच्छति ?

(ii) आलेखात् 2500 रुप्यकस्य वार्षिक-कुसीदं जानन्तु।

(iii) 280 रुप्यकात्मकं कुसीदं प्राप्तुं कियत् धनं सञ्चितं

2. निम्न-तालिकानां कृते आलेखं रचयन्तु।

(i)

वर्गस्य भुजः (सेण्टीमीटरपरिमिते)	2	3	3.5	5	6
परिमापनम् (सेण्टीमीटरपरिमिते)	8	12	14	20	24

किम् एषः रैखिकः आलेखः अस्ति ?

(ii)

वर्गस्य भुजः (सेण्टीमीटरपरिमिते)	3	3	4	5	36
क्षेत्रफलम् (मध्ये)	4	9	16	25	6

किम् एषः रैखिक-आलेखः अस्ति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. आलेखीय-चित्रणस्य बोधः सरलः भवति।

2. (i) दण्ड-आलेखः विभिन्न-श्रेणिनां तोलनार्थम् उपयुक्तः भवति।

(ii) वृत्त-चित्रम् अथवा वृत्त-आलेखः एकस्य सम्पूर्णस्य विभिन्न-भागानां तोलनार्थम् उपयुक्तः भवति।

(iii) आयत-चित्रम् , नैरन्तर्य-अन्तरालयुक्तानां गणनानां कृते दण्ड-आलेखः भवति।

3. रेखा-आलेखः समयस्य अन्तरालेन सह गणनायां परिवर्तनं दर्शयति।

4. रेखा-आलेखः यः एकः पूर्ण-अखण्डितरेखा भवेत् , एकः रैखिक-आलेखः इति उच्यते।

5. वर्गाङ्कितकर्गदे कस्य अपि बिन्दोः निर्धारणार्थम् अस्माकं कृते x- निर्देशाङ्कस्य y- निर्देशाङ्कस्य च आवश्यकता अस्ति।

6. एकस्मिन् स्वतन्त्र-चरे आश्रित-चरे च सम्बन्धः एकेन आलेखेन प्रदर्शितः भवति।

अध्यायः
16

संख्याभिः सह क्रीडनम्

16.1 भूमिका

भवन्तः विभिन्नप्रकारकानां संख्यानां यथा - प्राकृतसंख्या-पूर्णसंख्या-पूर्णाङ्क-परिमेयसंख्यानाञ्च विषये अध्ययनं कृतवन्तः । भवन्तः एतासाम् अनेकरोचकगुणानां विषयेऽपि अध्ययनं कृतवन्तः । vi कक्षायां वयं गुणनखण्डं गुणजञ्च ज्ञातुम् अन्विष्टवन्तः तथा एतत् अपि दृष्टवन्तः यत् एतयोः मध्ये कं सम्बन्धं ज्ञातुं शक्नुमः । अस्मिन् अध्याये वयं संख्यायाः विषये इतोऽपि अधिकं विस्तृतं ज्ञानं प्राप्स्यामः । एताः अवधारणाः विभाज्यतायाः नियमानां परीक्षण-औचित्य-बोधने साहाय्यं करिष्यन्ति ।

16.2 व्यापकरूपे संख्याः

आगच्छन्तु एकां संख्यां 52 इति गृह्णामः तथा एताम् अस्मिन् रूपे लिखामः -

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

एवमेव 37 संख्यां एवं प्रकारेण लेखितुं शक्नुमः -

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

व्यापकरूपे a तथा b इत्याभ्यां निर्मिता कस्य अपि अङ्कद्वयस्य संख्या ab इति अस्मिन् रूपे अपि लेखितुं शक्नुमः - $ab = 10 \times a + b = 10a + b$

ba इत्यस्य विषये किं कथयितुं शक्नुमः ? $ba = 10 \times b + a = 10b + a$

अत्र ab इत्यस्य अर्थः a × b नास्ति ।

आगच्छन्तु , इदानीं 351 इति संख्यां गृह्णामः एषा एका त्रयाणाम् अङ्कानां संख्या अस्ति । एतां संख्याम् अपि अस्मिन् रूपे लेखितुं शक्नुमः ।

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

एवमेव $497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

व्यापकरूपे a,b तथा c अङ्कैः कस्य अपि त्रयाणाम् अङ्कानां abc इति संख्यां अस्मिन् रूपे लेखितुं शक्नुमः-

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

एवमेव, $cab = 100c + 10a + b$

$bca = 100b + 10c + a$ इत्यादिः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितसंख्यां व्यापकरूपे लिखन्तु -

(i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302

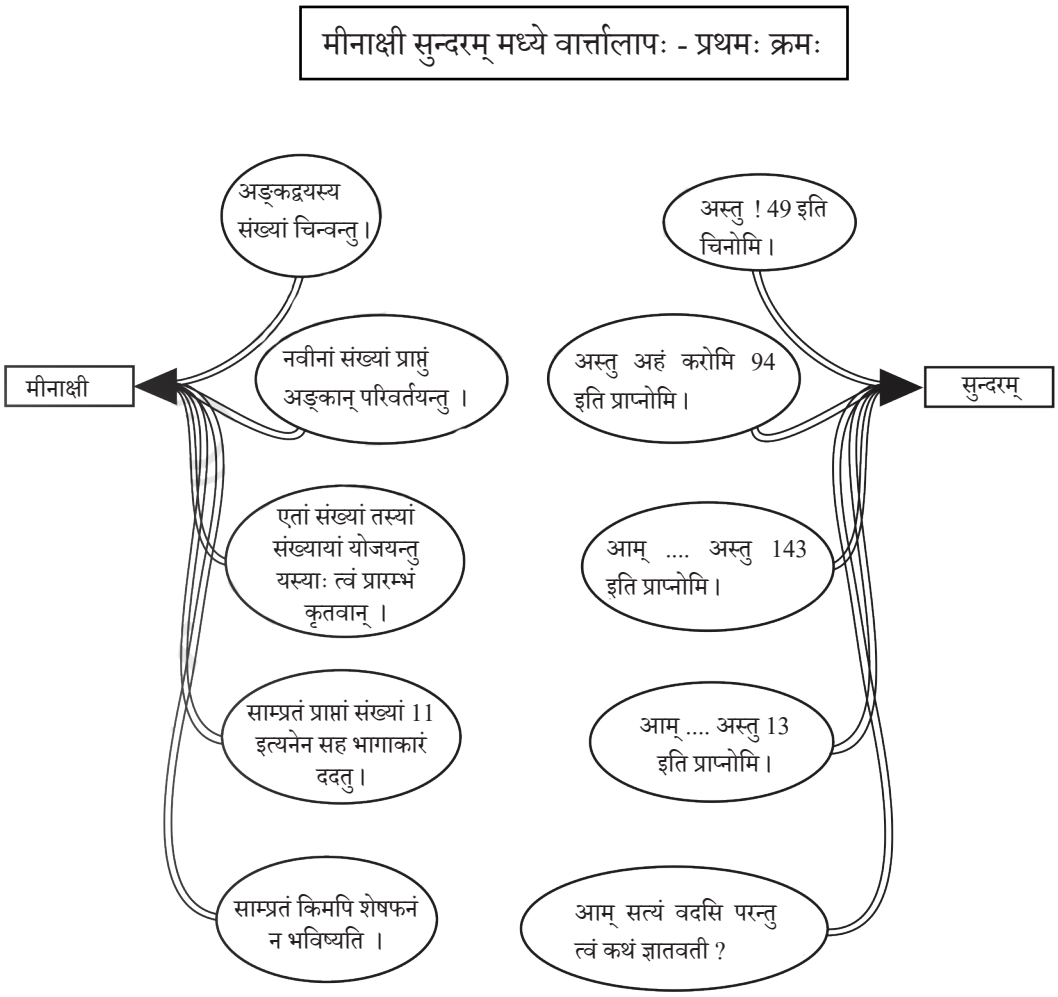
2. निम्नलिखितं सामान्यरूपे लिखन्तु -

(i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100a + 10c + b$

16.3 संख्याभिः सह क्रीडनम्

(i) अङ्कानां परिवर्तनं द्वयोः अङ्कयोः संख्या

मीनाक्षी सुन्दरं नाम-बालकात् अङ्कद्वययुतां संख्यां विचारितुं कथितवती तथा एतत् अपि कथितवती यत् सा यथा तं वदेत् सः तथा एव कुर्यात्। तयोः वार्त्तालापः निम्नलिखित-आकृतौ प्रदर्शितः अस्ति। अग्रे पठनात् पूर्वं कृपया आकृतेः ध्यानपूर्वकम् अध्ययनं कुर्वन्तु।



अत्र एवं भवति यत् सुन्दरम् 49 संख्यां चिनोति। अङ्कपरिवर्त्तने सति सः 94 इति संख्यां प्राप्नोति पुनः सः तां संख्यां संयोज्य $49 + 94 = 143$ इति प्राप्नोति। अन्ते सः एतां संख्यां 11 इत्यनेन सह भागाकारं कृत्वा $143 \div 11 = 13$ इति प्राप्तवान् तथा किमपि शेषफलं न अवशिष्टम्। एषा एव सा वार्ता या मीनाक्षी पूर्वम् एव ज्ञापितवती (अर्थात् प्रागुक्तिं कृतवती)।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षन्तु यत् यदि सुन्दरम् निम्नलिखित-संख्याम् अचेष्यत् तर्हि परिणामः कः अभविष्यत् ।

1. 27 2. 39 3. 64 4. 17

आगच्छन्तु वयं पश्यामः यत् किं वयं मीनाक्ष्याः चतुरतां स्पष्टं कर्तुम् शक्नुमः ।

स्वीकुर्वन्तु यत् सुन्दरम् ab इति संख्यां चिनोति या $10a + b$ इति संख्याद्वयानां संक्षिप्तरूपम् अस्ति ।

अङ्कानां परिवर्तने सति सा संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्नोति । एतयोः द्वयोः संख्ययोः योगे सति सः प्राप्नोति

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

$$= 11 (a + b)$$

अतः प्राप्तः योगः सदैव 11 इत्यस्य एकः गुणजः अस्ति यथा मीनाक्षी अभियोगं कृतवती । ध्यानं ददतु यत् यदि वयं योगं 11 इत्यनेन भागाकारं दद्मः तर्हि भागफलं $(a + b)$ इति प्राप्यते । एतत् भागफलं ab इति चितायाः संख्यायाः अङ्कानां योगस्य समानम् अस्ति ।

भवन्तः उपरोक्तस्य परीक्षणं काम् अपि संख्याद्वयानां संख्यां नीत्वा कर्तुं शक्नुवन्ति ।

मीनाक्षी तथा सुन्दरम् इत्यनयोः क्रीडा प्रचलति एव ।

मीनाक्षी - एकस्य अन्यस्य संख्याद्वयस्य विषये विचारय । परन्तु अहं तां संख्यां न ज्ञापयिष्यामि ।

सुन्दरम् - अस्तु !

मीनाक्षी - इदानीम् अङ्कान् परिवर्तयतु तथा दीर्घ-संख्यायां लघु-संख्यां व्यवकलयतु ।

सुन्दरम् - अहं व्यवकलितवान् साम्प्रतम् अग्रे किं करणीयम् ?

मीनाक्षी - साम्प्रतं स्व उत्तरं 9 इत्यनेन भागाकारं ददातु । मम अभियोगः अस्ति यत् शेषफलं शून्यं भविष्यति ।

सुन्दरम् - आम् । त्वं सत्यं वदसि । वस्तुतः अत्र भागफलं शून्यम् एव अस्ति । परन्तु अस्मिन् विषये अहं जानामि यत् त्वम् अस्मिन् विषये निश्चिन्ता कथम् असि !

वस्तुतः सुन्दरम् 29 इति संख्यां विचारितवान् आसीत् । एतस्याः अङ्कान् परिवर्त्य सः 92 इति संख्यां प्राप्तवान् । पुनः सः $92 - 29 = 63$ इति प्राप्तवान् तथा अन्ते सः $63 \div 9$ इति ज्ञातवान् यत् भागफलं 7 इति प्रददाति तथा शेषफलं शून्यम् अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षन्तु यत् यदि सुन्दरम् निम्नलिखित-संख्याम् अचेष्यत् तर्हि परिणामः कः अभविष्यत् ।

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

भवन्तः पश्यन्तु यत् केन प्रकारेण सुन्दरम् मीनाक्ष्याः चतुरतां स्पष्टयति । (इदानीं सः एवं करणे आत्मविश्वासस्य अनुभवं करोति ।)

स्वीकुर्वन्तु यत् सः ab = 10a + b इति अङ्कद्वयस्य संख्यां चिनोति। अङ्कानां परिवर्त्तने सति सः ba = 10b + a इति संख्यां प्राप्नोति। अतः मीनाक्षी तं बृहत् संख्यायां लघुसंख्यां व्यवकलयितुं वदति।

- यदि दशकस्य अङ्कः एककस्य अङ्कात् बृहत् अस्ति (अर्थात् a > b अस्ति) तर्हि सः एवं रीत्या व्यवकलयति।

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9 (a - b)$$

- यदि एककस्य अङ्कः दशकस्य अङ्कात् बृहत् अस्ति (अर्थात् b > a अस्ति) तर्हि सः एवं रीत्या व्यवकलयति।

$$(10b + a) - (10a + b) = 9 (b - a)$$

- निस्सन्देहः, यदा a = b अस्ति, तदा सः 0 इति प्राप्नोति।

प्रत्येकं स्थितौ परिणामीसंख्या 9 इत्यतः विभाज्या अस्ति। अतः शेषफलं 0 अस्ति। ध्यानं ददतु यत् यदि वयं व्यवकलने सति प्राप्तपरिणामी-संख्यां 9 इत्यतः भागाकारं कुर्मः तर्हि वयं a > b अथवा a > b इत्यनुसारेण (a - b) अथवा (b - a) इति प्राप्नुमः। भवन्तः कामपि अन्य-अङ्क-द्वयस्य संख्यां नीत्वा उपरोक्त-तथ्यस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति।

(ii) अङ्कानां परिवर्त्तनम् - अङ्कत्रयाणां संख्या

साम्प्रतं सुन्दरम् महोदयस्य क्रमः अस्ति यत् सः कामपि चतुरतां प्रदर्शयेत्।

सुन्दरम् - एकस्य अङ्कत्रयस्य संख्या विचारयतु परन्तु तस्मिन् विषये मां न कथयतु।

मीनाक्षी - अस्तु !

सुन्दरम् - इदानीम् एतेषाम् अङ्कानां विपरीतक्रमं नीत्वा एकां नवीनां संख्यां निर्मापयतु तथा बृहत् संख्यायां लघुसंख्यां व्यवकलयतु।

मीनाक्षी - अस्तु ! अहं व्यवकलितवती अग्रे किं करणीयम् ?

सुन्दरम् - स्व-उत्तरं 99 इत्यतः भागाकारं ददातु। अहं निश्चितरूपेण कथयितुं पारयामि यत् शेषफलं शून्यं भविष्यति।

वास्तवरूपे मीनाक्षी अङ्कत्रयाणां संख्या 349 इति चितवती। अत एव सा प्राप्तवती -

- अङ्कपरिवर्त्तने सति संख्या - 943
- व्यवकलनम् - 943 - 349 = 594
- विभाजनम् - 594 ÷ 99 = 6, शून्यफलेन सह।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षयन्तु यत् यदि मीनाक्षी निम्नलिखितसंख्याम् अचेष्यत् तर्हि परिणामः कः अभविष्यत् ? प्रत्येकं स्थितौ अन्ते प्राप्तस्य भागफलस्य एकं सञ्चयं पश्यन्तु।

1. 132 2. 469 3. 737 4. 901

आगच्छन्तु पश्यामः यत् चतुरता कथं कार्यं करोति। स्वीकुर्वन्तु यत् मीनाक्ष्या चितानाम् अङ्कत्रयाणां संख्या abc = 100a + 10b + c अस्ति।

अङ्कान् परिवर्त्तने सति सा cba = 100c + 10b + a इति संख्यां प्राप्नोति। व्यवकलने सति प्राप्स्यति।

- यदि a > c अस्ति तर्हि संख्यानाम् अन्तरः अस्ति।

  (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a

  = 99a - 99c = 99 (a - c)

- यदि c > a अस्ति तर्हि संख्यानाम् अन्तरः अस्ति।

  (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)= 99c - 99a = 99 (c - a).

- निःसन्देहः यदि a = c अस्ति तर्हि 0 अन्तरः अस्ति।

प्रत्येकं स्थितौ परिणामी संख्या 99 तः विभाज्या अस्ति। अत एव शेषफलं 0 इति प्राप्नोति। ध्यानं ददतु यत् भागफलं (c - a) भविष्यति। भवन्तः अङ्कत्रयाणाम् अन्यां संख्यां नीत्वा अस्य एव तथ्यस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति।

(iii) प्रदत्त-त्रिभ्यः अङ्केभ्यः त्रयाणां संख्यानां संख्यानिर्माणम् -

इदानीं पुनः मीनाक्ष्याः क्रमः अस्ति।

मीनाक्षी - त्रयाणाम् अङ्कानां काञ्चित् संख्यां विचारयन्तु।

सुन्दरम् - अस्तु ! अहम् एवं कृतवान्।

मीनाक्षी - साम्प्रतम् अस्याः संख्यायाः प्रयोगः अन्यं द्वयं त्रयाणाम् अङ्कानां संख्यानिर्माणे एवं कुर्वन्तु। यदि त्वं abc इति संख्यां चितवान् अस्ति तर्हि -

- प्रथमा संख्या cba (अर्थात् एककस्य अङ्कः तस्याः संख्यायाः सर्वतः वाम पक्षे प्राप्तवान्)।
- अन्या संख्या bca (अर्थात् शतकस्य अङ्कः तस्याः संख्यायाः सर्वतः दक्षपक्षे प्राप्तवान्)।

इदानीम् एतां संख्यां योजयतु। परिणामीसंख्यां 37 इत्यतः भागाकारं ददातु। मम अभियोगः अस्ति यत् शेषफलं शून्यं भविष्यति।

सुन्दरम् - आम् ! त्वं सत्यं वदसि।

वास्तविकरूपे सुन्दरम् वर्यः त्रयाणाम् अङ्कानां संख्या 237 इति विचारितवान्। यथा मीनाक्षी उक्तवती आसीत् तथा कृते सति सः 723 तथा 372 इति प्राप्तवान्। अतः सः एवं कृतवान्।

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ +\ 7\ 2\ 3 \\ +\ 3\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2, 3 तथा 7 इति संख्या त्रयाणां प्रयोगं कृत्वा अङ्कत्रयं युक्तं सर्वां सम्भवसंख्यां निर्मान्तु तथा अस्य योगं जानन्तु। परीक्षयन्तु किम् एषः योगः 37 इत्यतः विभाज्यः अस्ति। किम् एषा संख्या abc एतेषां त्रयाणाम् अङ्कानां a, b तथा c इत्यतः निर्मित-सर्वासां संख्यानां योगाय सत्यम् अस्ति।

तत् पश्चात् सः 1332 इति परिणामी-संख्यां 37 इत्यतः भागाकारं कृतवान्।

1332 ÷ 37 = 36, शेषफलं शून्येन सहितम्।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षयन्तु यत् यदि सुन्दरम् वर्यः निम्नलिखितसंख्याम् अविचारयिष्यत् तर्हि परिणामः कः अभविष्यत् ?

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

किम् एषा चतुरता सर्वदैव कार्यं करोति ?

आगच्छन्तु पश्यामः

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

$$abc + cab + bca = 111\ (a + b + c)$$

$$= 37 \times 3(a + b + c),$$ यः 37 इत्यतः विभाज्यः अस्ति।

16.4 अङ्कानां कृते अक्षरम्

अत्र अस्माकं समक्षं कांश्चन प्रहेलिकाः सन्ति यत्र एकस्मिन् अङ्कगणितीय-प्रश्ने अङ्कानां स्थाने अक्षराणि भवन्ति तथा तां समस्यां जानन्तु यत् किम् अक्षरं कस्य अङ्कस्य निरूपणं करोति। अतः एतत् एकप्रकारेण कूटसमाधानम् इव वार्त्ता अस्ति। प्रायः वयं योगस्य गुणनस्य च समस्यातः सीमिताः भविष्यामः। एतादृशानां प्रहेलिकानां समाधानसमये अङ्गीकरणयोग्यौ द्वौ नियमौ एतौ स्तः।

1. प्रहेलिकायां प्रत्येकम् अक्षरं केवलम् एकस्य एव अङ्कस्य प्रदर्शनं कुर्यात्। एकः अङ्कः केवलम् एकेनैव अक्षरेण प्रदर्शितः भवेत्।
2. एकस्याः संख्यायाः प्रथमः अङ्कः शून्यं न भवितुम् अर्हति। एवं प्रकारेण वयं त्रिषष्टिः इति संख्यां '063' अथवा '0063' इति न लिखित्वा '63' इति लिखामः। एकः नियमः यस्य पालनम् अस्माभिः एव करणीयं यत् एकस्याः प्रहेलिकायाः केवलम् एकम् एव उत्तरं भवेत्।

उदाहरणम् 1 निम्नलिखित-योगे Q इति जानन्तु।

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

समाधानम् - अत्र केवलम् एकम् अक्षरं Q इति अस्ति यस्य अस्माभिः मानं ज्ञातव्यम्।

एककस्य स्तम्भे उपरोक्त-योगस्य अध्ययनं कुर्वन्तु। Q + 3 इत्यतः वयं 1 इति प्राप्नुमः। अर्थात् एका संख्या यस्याः एककस्य अङ्कः 1 इति अस्ति।

एवं करणाय Q अङ्कः 8 भवितव्यः। अतः एतां प्रहेलिकां निम्नदर्शानुसारं समाधातुं शक्यते।

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात् Q = 8 अस्ति।

उदाहरणम् 2 निम्नलिखित-योगे A तथा B जानन्तु।

$$\begin{array}{r} A \\ +\ A \\ +\ A \\ \hline B\ A \\ \hline \end{array}$$

समाधानम् अस्मिन् अक्षरद्वयं A तथा B अस्ति, यस्य मानं ज्ञातव्यम् अस्ति।

एककस्य स्तम्भे योगस्य अध्ययनं कुर्वन्तु A इति त्रयस्य योगः एका ईदृशी संख्या अस्ति यस्याः एककस्य अङ्कः A अस्ति। अतः A इति द्वयस्य योगः एका ईदृशी संख्या भवेत् यस्याः एककस्य अङ्कः 0 भवेत्। एतत् तदा एव भवितुम् अर्हति यदा A = 0 भवेत् अथवा A = 5 स्यात्।

यदि A = 0 अस्ति तर्हि योगः 0 + 0 + 0 = 0 भविष्यति, यस्मात् B = 0 भविष्यति। वयम् एतत् न इच्छामः (यतो हि एतेन A = B भविष्यति तथा AB इत्यस्य दशकस्य अङ्कः अपि 0 भविष्यति)। अत एव वयम् एतत् त्यजामः। अतः A = 5 अस्ति।

अत एव एतस्याः प्रहेलिकायाः समाधानं निम्नानुसारं भविष्यति।

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ \hline 1\ 5 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात् A = 5 तथा B = 1 भवेत्।

उदाहरणम् 3 A तथा B इति जानन्तु।

$$\begin{array}{r} B\ A \\ \times\ B\ 3 \\ \hline 5\ 7\ A \\ \hline \end{array}$$

समाधानम् अत्र अपि अक्षरद्वयं A तथा B अस्ति, यस्य मानं ज्ञातव्यम् अस्ति। यतोहि 3 × A इत्यस्य एककस्य अङ्कः A इति अस्ति, अत एव A = 0 एतत् अस्ति अथवा A = 5 एतत् अस्ति।

साम्प्रतं B इति पश्यतु। यदि B = 1भवेत् तर्हि BA × B3 इत्यस्य मानम् अधिकाधिकम् 19 × 19 अर्थात् 361 भविष्यति। परन्तु अत्र गुणनफलं 57A अस्ति। यत् 500तः अधिकम् अस्ति। अतः B = 1 न भवितुम् अर्हति।

यदि B = 3 भवेत् तर्हि BA × B3 इत्यस्य गुणनफलं 30 × 30 इत्यतः अधिकं भविष्यति अर्थात् एतत् 900 इत्यतः अधिकं भविष्यति। परन्तु 57A इत्यस्य मानं 600 तः न्यूनम् अस्ति। अतः B = 3 न भवितुम् अर्हति।

उपरोक्त-तथ्यद्वयं दृष्टिगतं स्थापयन्तः B इत्यस्य मानं केवलं 2 एव भवितुम् अर्हति। अतः प्रदत्तगुणनं 20 × 23 भविष्यति अथवा 25 × 23 भविष्यति।

प्रथमा सम्भावना न भवितुं शक्या यतो हि 20 × 23 = 575 अस्ति।

अतः A = 5 तथा B = 2 अस्ति।

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\ 2\ 3 \\ \hline 5\ 7\ 5 \\ \hline \end{array}$$

एतत् कुर्वन्तु

अङ्कद्वयस्य एकां संख्यां ab इति लिखन्तु तथा एतान् अङ्कान् परिवर्त्तने सति प्राप्त-संख्यां ba इति लिखन्तु। अस्य योगं जानन्तु। स्वीकुर्वन्तु एषः योगः त्रयाणाम् अङ्कानाम् एका संख्या dad अस्ति।

अर्थात् $ab + ba = dad$

$(10a + b) + (10b + a) = dad$

$11(a + b) = dad$

योगः (a + b) 18 संख्यातः अधिकः न भवितुम् अर्हति (कथम् ?)। किम् dad 11 इत्यस्य एकः गुणजः अस्ति ? किम् dad 198 इत्यतः न्यूनम् अस्ति ? 198 पर्यन्तं त्रयाणाम् अङ्कानाम् एतादृश्यः सर्वाः संख्याः लिखन्तु या 11 इत्यस्य गुणजा भवेत्। a तथा d इत्यस्य मानं जानन्तु।

प्रश्नावली 16.1

निम्नलिखितेषु प्रत्येकम् अक्षराणां मानं जानन्तु तथा सम्बद्धचरणाय कारणम् अपि ददतु।

1.
$$\begin{array}{r} 3\ A \\ +\ 2\ 5 \\ \hline B\ 2 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 4\ A \\ +\ 9\ 8 \\ \hline C\ B\ 3 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\ A \\ \hline 9\ A \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ 3\ 7 \\ \hline 6\ A \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 3 \\ \hline C\ A\ B \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 5 \\ \hline C\ A\ B \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ 6 \\ \hline B\ B\ B \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} A\ 1 \\ +\ 1\ B \\ \hline B\ 0 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ +\ A\ B\ 1 \\ \hline B\ 1\ 8 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 1\ 2\ A \\ +\ 6\ A\ B \\ \hline A\ 0\ 9 \end{array}$$

16.5 विभाज्यतायाः परीक्षणम्

VI कक्ष्यायां भवन्तः एतत् पठितवन्तः यत् निम्नलिखित-भाजकेभ्यः कथं विभाज्यतायाः परीक्षणं भवितुम् अर्हति -

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11

भवतः कृते अस्य परीक्षणस्य नियमः सरलः स्यात् परन्तु सहैव भवन्तः एतत् अपि साश्चर्यम् अनुभूतवन्तः स्युः यत् एताः कथं कार्यं कुर्वन्ति। अधुना वयम् अस्मिन् अध्याये अस्य 'किम्' इति पक्षे चर्चां करिष्यामः।

16.5.1 10 द्वारा विभाज्यता

एतत् निश्चयेन सर्वेषु सरलतमं परीक्षणम् अस्ति। वयं पूर्वं 10 इत्यस्य कांश्चन गुणजान् पश्यामः।

10, 20, 30, 40, 50, 60 .....

एतेन सहैव 10 इत्यस्य कांश्चन अगुणजान् पश्यन्तु 13, 27, 32, 48, 55, 69..... एताभ्यः संख्याभ्यः वयम् एतत् जानीमः यत् ईदृश्यः संख्याः यस्याः एककस्य अङ्कः 0 अस्ति, 10 इत्यस्य गुणजाः सन्ति तथा ताः संख्याः यस्याः एककस्य अङ्कः 0 इति नास्ति, 10 इत्यस्य गुणजाः न सन्ति। अनेन वयं 10 संख्याद्वारा विभाज्यतायाः परीक्षणस्य एकं नियमं प्राप्नुमः।

निःसन्देहः अस्माभिः केवलं परीक्षणस्य नियमं दत्वा न स्थगनीयं। अस्माभिः एतत् अपि स्पष्टी करणीया यत् एषः परीक्षणस्य नियमः कथं कार्यं करोति। एवं कठिनं नास्ति। अस्माभिः केवलं स्थानीयमानस्य नियमाः स्मर्तव्याः।

काञ्चित् संख्यां ... cba इति गृह्णन्तु। एतत् निम्नलिखितसंख्यायाः संक्षिप्तं रूपम् अस्ति।

... + 100c + 10b + a

अत्र a इति एककस्य अङ्कः अस्ति, b इति दशकस्य अङ्कः अस्ति, c इति शतकस्य अङ्कः अस्ति इत्यादिः। अत्र त्रयः बिन्दवः (...) एतत् प्रदर्शयन्ति यत् c इत्यस्य वामपक्षे इतोऽपि अङ्काः भवितुम् अर्हन्ति। यतो हि 10 , 100 , ... 10 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति , अत एव 10b, 100c, … अपि 10 इत्यनेन विभाज्याः भविष्यन्ति। यावत् पर्यन्तं a संख्यायाः प्रश्नः अस्ति यदि प्रदत्ता संख्या 10 इत्यनेन विभाज्या अस्ति तर्हि a इत्यपि 10 इत्यनेन विभाज्यः भवेत्। एतत् तदा एव सम्भवति यदा a = 0 अस्ति।

16.5.2 5 इत्यनेन विभाज्यता

5 इत्यस्य गुणजान् पश्यन्तु - 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

वयं पश्यामः यत् एककस्य अङ्कः 5 तथा 0 एकां संख्यां त्यक्त्वा आगच्छतः तथा एतत् अतिरिक्तं वयं पश्यामः यत् एककस्य स्थाने कोऽपि अन्यः अङ्कः न आगच्छति।

अतः वयं 5 द्वारा विभाज्यतायाः एतं नियमं प्राप्नुमः। यदि कस्याः अपि संख्यायाः एककस्य अङ्कः 5 अथवा 0 अस्ति तर्हि सा संख्या 5 इत्यनेन विभाज्या भवति।

आगच्छन्तु एतं नियमं स्पष्टं कुर्मः। ...cba इति संख्याम् एवं प्रकारेण अपि लेखितुं शक्यते।

... + 100c + 10b + a

यतो हि 10, 100, ... 10 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति अत एव 10b, 100b, … अपि 10 इत्यनेन विभाज्याः भविष्यन्ति तथा एतत् एव अनन्तरं 5 इत्यनेन विभाज्याः भविष्यन्ति , यतो हि $10 = 5 \times 2$ अस्ति। यावत् a इति संख्यायाः प्रश्नः अस्ति यदि संख्या 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति तर्हि एतत् अपि 5 इत्यनेन विभाज्यं भवेत्। अतः a इति 0 भवेत् अथवा 5 इति भवेत्।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

(प्रथमः प्रश्नः भवतां साहाय्यार्थं कृतः अस्ति ।)

1. यदि N ÷ 5 इति विभाजनेन शेषफलं 3 इति प्राप्यते तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवितुम् अर्हति ?
   (एककस्य अङ्कं 5 इत्यनेन भागाकारे कृते सति शेषफलं 3 इति आगच्छेत् । अतः एककस्य अङ्कः 3 अथवा 8 भविष्यति ।)
2. यदि N ÷ 5 इति विभाजनेन शेषफलं 1 इति प्राप्यते तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवितुम् अर्हति ?
3. यदि N ÷ 5 इति विभाजनेन शेषफलं 4 इति प्राप्यते तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवितुम् अर्हति ?

16.5.3 2 इत्यनेन विभाज्यता

एताः सर्वाः समसंख्याः सन्ति - 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,

तथा एताः विषमसंख्याः सन्ति - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,

वयं पश्यामः यत् एका प्राकृत-संख्या समसंख्या भवति यदि एतस्याः एककस्य 2, 4, 6, 8, अथवा 0 अङ्काः भवेयुः ।

एका संख्या विषमा भवति यदि अस्याः एककस्य 1, 3, 5, 7, अथवा 9 अङ्काः भवेयुः ।

VI कक्ष्यायां पूर्वपठितस्य 2 इति विभाज्यतायाः परीक्षणस्य नियमान् स्मरन्तु । एषः नियमः एवम् अस्ति -

यदि कस्याः अपि संख्यायाः एककस्य अङ्कः 0, 2, 4, 6 अथवा 8 भवेत् तर्हि सा संख्या 2 इत्यनेन विभाज्या भवति ।

एतदर्थं स्पष्टीकरणम् एवम् अस्ति -

काम् अपि संख्यां ... cba इति … + 100c + 10b + a इति रूपे लेखितुं शक्नुमः । एतत् पूर्वं पदद्वयं 100c तथा 10b इति संख्ये 2 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । यतो हि 100 तथा 10 संख्ये 2 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । यावत् a इत्यस्य प्रश्नः अस्ति यदि प्रदत्तसंख्या 2 इत्यनेन विभाज्या अस्ति तर्हि एषा अपि 2 इत्यनेन विभाज्या भवेत् । एतत् तदा एव सम्भवम् अस्ति यदा a = 0, 2, 4, 6 अथवा 8 भवेत् ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

(प्रथमः प्रश्नः भवतां साहाय्यार्थं कृतः अस्ति ।)

1. यदि N ÷ 2 इति विभाजनेन शेषफलं 1 इति प्राप्यते तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवितुम् अर्हति ?
   (N विषमः अस्ति । अत एव एककस्य अङ्कः विषमः भविष्यति । अतः N इत्यस्य एककस्य अङ्कः 1, 3, 5, 7 अथवा 9 भविष्यति ।)
2. यदि N ÷ 2 इति विभाजनेन शेषफलं किमपि न प्राप्यते (अर्थात् शेषफलं 0 अस्ति) तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवितुम् अर्हति ?
3. स्वीकुर्वन्तु यदि N ÷ 5 इति विभाजनेन शेषफलं 4 तथा N ÷ 2 इति विभाजनेन शेषफलं 1 इति प्राप्यते तर्हि N इत्यस्य एककस्य अङ्कः कः भवेत् ?

16.5.4 9 तथा 3 इत्यनेन विभाज्यता

इदानीं पर्यन्तं ज्ञातविभाज्यतायाः परीक्षणस्य त्रीन् नियमान् ध्यानपूर्वकं पश्यन्तु। यः 10, 5, तथा 2 इत्यस्य विभाजनस्य परीक्षणाय आसीत्। वयम् अस्मिन् एकं समानं दृश्यं पश्यामः - अस्मिन् प्रदत्तसंख्यायाः केवलम् एककस्य एव अङ्कस्य प्रयोगः भवति तथा अन्यस्मात् अङ्कात् अस्मिन् कोऽपि प्रभावः न पतति। एवं प्रकारेण विभाज्यतायाः निर्णयः केवलम् एककस्य अङ्केन एव भवति। 10, 5 तथा 2 संख्या 10 इत्यस्य भाजकाः सन्ति या अस्माकं स्थानीयमान-पद्धतौ एका महत्त्वपूर्णा संख्या अस्ति।

परन्तु 9 इत्यनेन विभाज्यतायाः परीक्षणे एते नियमाः न चलिष्यन्ति। आगच्छन्तु काम् अपि संख्यां स्वीकुर्वन्तु यथा 3573 इति गृह्णन्तु। अस्य प्रसारितं रूपम् - $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$ अस्ति। एतत् एवम् अपि लेखितुं शक्यते।

$3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3)$ ... (1)

वयं पश्यामः यत् 9 संख्या 3 इत्यतः तदा एव विभाज्या भविष्यति यदि $(3 + 5 + 7 + 3)$ संख्या 9 अथवा 3 इत्यनेन विभाज्या भवेत्।

वयं पश्यामः यत् $(3 + 5 + 7 + 3) = 18$ संख्या 9 इत्यनेन विभाज्या अस्ति तथा 3 इत्यनेन अपि विभाज्या अस्ति। अतः 3573 इति संख्या 9 तथा 3 इत्यनयोः विभाज्या अस्ति।

आगच्छन्तु इदानीं 3576 इति संख्याविषये विचारं कुर्मः। ऊपरितनम् इव वयं प्राप्नुमः।

$3576 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$

यतो हि $(3 + 5 + 7 + 6) = 21$, 9 इत्यनेन विभाज्या नास्ति, परन्तु 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति, अत एव 3576, 9 संख्यया विभाज्या नास्ति। परन्तु एषा 3 इत्यतः विभाज्या अस्ति। अतः ,

(i) N इति एका संख्या 9 संख्यातः विभाज्या भवति, यदि अस्याः अङ्कानां योगः 9 इत्यतः विभाज्यः भवेत्। अन्यथा सः 9 इत्यतः विभाज्यः न भविष्यति।

(ii) N इति एका संख्या 3 संख्यातः विभाज्या भवति, यदि अस्याः अङ्कानां योगः 3 इत्यतः विभाज्यः भवेत्। अन्यथा सः 3 इत्यतः विभाज्यः न भविष्यति।

यदि संख्या cba अस्ति तर्हि $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$= 9 (11c + b) + (a + b + c)$

3 तथा 9 इत्यतः विभाज्यः

अतः 9 (अथवा 3) इत्यस्य विभाज्यता तदा एव सम्भवा अस्ति यदा $(a + b + c)$ 9 (अथवा 3) इत्यतः विभाज्या भवेत्।

उदाहरणम् 4 21436587 इत्यस्य 9 इत्यतः विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।

समाधानम् - 21436587 इत्यस्य अङ्कानां योगः $= 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$।

एषः योगः 9 इत्यतः विभाज्यः अस्ति। $(36 \div 9 = 4)$

अतः वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् 21436587 इति संख्या 9 इत्यतः विभाज्या अस्ति। वयं पुनः परीक्षणम् अपि कर्तुं शक्नुमः $\frac{21436587}{9}$ = 2381843 (विभाज्यः पूर्णः अस्ति)

उदाहरणम् 5 152875 इत्यस्य 9 इत्यतः विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।

समाधानम् - 152875 इत्यस्य अङ्कानां योगः 1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28 अस्ति। एषा संख्या 9 इत्यतः विभाज्या नास्ति। वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् 152875 संख्या 9 इत्यतः विभाज्या नास्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-संख्यानां 9 इत्यतः विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

उदाहरणम् 6 यदि त्रयाणाम् अङ्कानां संख्या 24x, 9 इत्यतः विभाज्या अस्ति तर्हि x इत्यस्य मानं किम् ?

समाधानम् यतो हि 24x, 9 संख्यातः विभाज्या अस्ति अत एव अस्य अङ्कानां योगः 2 + 4 + x, 9 इत्यतः विभाज्या भवेत्। अर्थात् 6 + x, a इत्यनेन विभाज्या भवेत्।

एतत् तदा एव सम्भवम् अस्ति यदा 6 + x भवेत् 9 अथवा 18 भवेत्। यतो हि x एकः अङ्कः अस्ति अत एव 6 + x = 9 इति भविष्यति। अतः x = 3 अस्ति।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

1. भवन्तः दृष्टवन्तः यत् 450, 10 इत्यतः विभाज्यः अस्ति। एषः 2 तथा 5 तः अपि विभाज्यः अस्ति ये 10 इत्यस्य गुणनखण्डाः सन्ति। एवमेव 135 संख्या 9 इत्यतः विभाज्या अस्ति। एषा 3 इत्यतः अपि विभाज्या अस्ति , या 9 इत्यस्य एकः गुणनखण्डः अस्ति।
   किं भवन्तः कथयितुं शक्नुवन्ति यत् यदि काचित् संख्या कस्याः अपि संख्यायाः m इत्यतः विभाज्या स्यात् तर्हि सा m इत्यस्य प्रत्येकं गुणनखण्डात् विभाज्या भविष्यति ?
2. (i) एका त्रयाणाम् अङ्कानां संख्या abc इति 100a + 10b + c इति रूपे लिखन्तु। अधुना -

   $100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$

   $= 11 (9a + b) + (a - b + c)$

   यदि abc संख्या 11 इत्यतः विभाज्या अस्ति तर्हि भवन्तः (a - b + c) इत्यस्मिन् विषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ? किम् एतत् आवश्यकम् अस्ति यत् (a + c - b), 11 इत्यतः विभाज्या भवेत् ?

   (ii) एका चतुर्णाम् अङ्कानां संख्या adcd इति एवं प्रकारेण लिखन्तु -

   $1000a + 100b + 10c + d$

   $= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$

   $= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$

यदि संख्या adcd, 11 इत्यतः विभाज्या अस्ति तर्हि (b+ d) - (a + c) इत्यस्मिन् विषये भवन्तः किं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

(iii) उपरोक्तात् (i) तथा (ii) इत्यतः भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति यत् काचित् संख्या 11 इत्यतः विभाज्या भविष्यति , यदि अस्य विषमस्थानानाम् अङ्कानां योगः तथा सम स्थानानाम् अङ्कानां योगस्य अन्तरः 11 तः विभाज्या भविष्यति ?

उदाहरणम् 7 2146587 इत्यस्य 3 इत्यनेन विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु ।

समाधानम् 2146587 इत्यस्य अङ्कानां योगः 2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33 अस्ति । यः स्पष्टतः 3 इत्यनेन विभाज्यः अस्ति (33 ÷ 3 = 11) । अतः वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् 2146587 संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ।

उदाहरणम् 8 15287 इत्यस्य 3 इत्यनेन विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु ।

समाधानम् 15287 इत्यस्य अङ्कानां योगः = 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23 एषा संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या नास्ति । वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् 15287 संख्या 3 इत्यनेन विभाज्या नास्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-संख्यानां 3 इत्यनेन सह विभाज्यतायाः परीक्षणं कुर्वन्तु ।

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

प्रश्नावली 16.2

1. यदि 21y5, 9 इत्यस्य गुणजः अस्ति, यत्र y एकः अङ्कः अस्ति, तर्हि y इत्यस्य मानं किम् अस्ति ?
2. यदि 31z5, 9 इत्यस्य गुणजः अस्ति, यत्र z एकः अङ्कः अस्ति, तर्हि z इत्यस्य मानं किम् अस्ति ? भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् अस्य उत्तरद्वयं वर्त्तते । एतत् किमर्थम् ?
3. यदि 24x, 3 इत्यस्य गुणजः अस्ति, यत्र x एकः अङ्कः अस्ति, तर्हि x इत्यस्य मानं किम् अस्ति ?

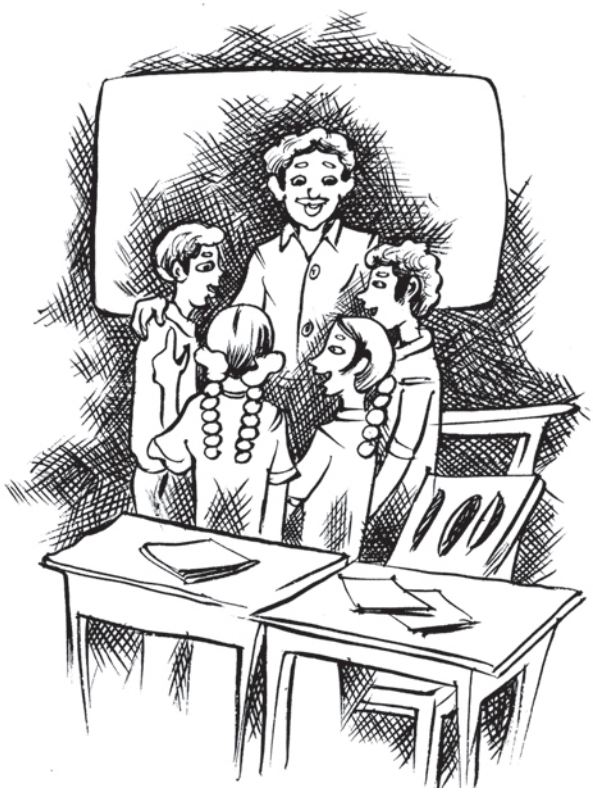
   (यतो हि 24x, 3 इत्यस्य एकः गुणजः अस्ति, अत एव अस्य अङ्कानां योगः 6 + x, 3 इत्यस्य एकः गुणजः अस्ति । अर्थात् 6 + x निम्नलिखितेषु काचित् एका संख्या भविष्यति,

   0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

   परन्तु यतो हि x एकः अङ्कः अस्ति , अत एव 6 + x = 6 अथवा 6 + x = 9 अथवा 6 + x = 12 अथवा 6 + x = 15 भवितुम् अर्हति । अतः x = 0 अथवा 3 अथवा 6 अथवा 9 भवितुम् अर्हति । अत एव x इत्यस्य मानं एतेषु चतुर्षु विभिन्नेषु मानेषु कश्चित् एकः भवितुम् अर्हति ।)
4. यदि 31z5, 3 इत्यस्य गुणजः अस्ति, यत्र z एकः अङ्कः अस्ति, तर्हि z इत्यस्य मानं किं भवितुम् अर्हति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. संख्याः व्यापकरूपेण लेखितुं शक्यन्ते। एवं रीत्या अङ्कद्वयस्य संख्या ab इति 10a + b इति लेखितुं शक्यते।
2. संख्यानां व्यापकं रूपं प्रहेलिकाः अथवा संख्या-क्रीडाः समाधातुं सहायकं भवति।
3. 10, 5, 2, 9 संख्यानां 3 द्वारा विभाज्यतायाः तर्कसङ्गततां प्रदातुं शक्यते यदि तासां व्यापकत्वेन लेखनं भवेत्।



प्रश्नावली 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) -1

5. (i) 1 गुणात्मकः तत्समकः अस्ति। (ii) क्रमविनिमेयता (iii) गुणनात्मकः प्रतिलोमः

6. $\frac{-96}{91}$ 7. सहचारिता 8. न, यतो हि गुणनफलं 1 नास्ति।

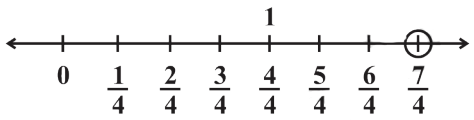
9. आम्, यतो हि $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

10. (i) 0 (ii) 1 तथा (-1) (iii) 0

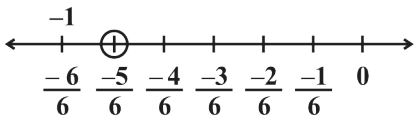
11. (i) न (ii) 1,-1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) परिमेयसंख्या (vi) धनात्मकः

प्रश्नावली 1.2

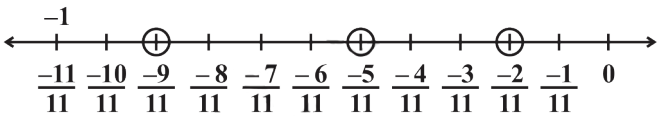
1. (i)



(ii)



2.



3. एतेषु केचन सन्ति - 1, $\frac{1}{2}$, 0 , -1, $\frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}$, $\frac{-6}{20}$, $\frac{-5}{20}$, $\frac{-4}{20}$, $\frac{-3}{20}$, $\frac{-2}{20}$, $\frac{-1}{20}$ 0,..., $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$ (एतादृश्यः एव इतोऽपि अनेकाः परिमेयसंख्याः भवितुम् अर्हन्ति)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$

(iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$ (एतादृश्यः एव इतोऽपि अनेकाः परिमेय-संख्याः भवितुम् अर्हन्ति।)

6. $\frac{-3}{2}$, -1 , $\frac{-1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$ (एतादृश्यः एव इतोऽपि अनेकाः परिमेय-संख्याः भवितुम् अर्हन्ति ।)

7. $\frac{97}{160}$, $\frac{98}{160}$, $\frac{99}{160}$, $\frac{100}{160}$, $\frac{101}{160}$, $\frac{102}{160}$, $\frac{103}{160}$, $\frac{104}{160}$, $\frac{105}{160}$, $\frac{106}{160}$

(एतादृश्यः एव इतोऽपि अनेकाः परिमेय-संख्याः भवितुम् अर्हन्ति ।)

प्रश्नावली 2.1

1. x = 9 **2.** y = 7 **3.** z = 4 **4.** x = 2 **5.** x = 2 **6.** t = 50

7. x = 27 **8.** y = 2.4 **9.** x = $\frac{25}{7}$ **10.** y = $\frac{3}{2}$ **11.** p = - $\frac{4}{3}$ **12.** x = - $\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 2.2

1. $\frac{3}{4}$ **2.** लम्बकम् =52m , वैशाल्यम् =25m **3.** 1 $\frac{2}{5}$ cm **4.** 40 तथा 55

5. 45, 27 **6.** 16, 17, 18 **7.** 288, 296 तथा 304 **8.** 7, 8, 9

9. राहुलस्य आयुः = 20 वर्षम् , हारूनस्य आयुः = 28 वर्षम्

10. 48 विद्यार्थिनः ।

11. बाइचुङ्गस्य आयुः = 17 वर्षम् , बाइचुङ्गस्य पितुः आयुः = 46 वर्षम् , बाइचुङ्गस्य पितामहस्य आयुः = 72 वर्षम् ।

12. 5 वर्षम् **13.** -$\frac{1}{2}$

14. 100 रुप्यकं - 2000 इत्यस्य धनपत्रम्, 50 रुप्यकं - 3000 इत्यस्य धनपत्रम् , 10 रुप्यकं - 5000 इत्यस्य धनपत्रम् ।

15. 1 रुप्यकाणां पणकाणां संख्या = 80, 2 रुप्यकाणां पणकाणां संख्या = 60, 5 रुप्यकाणां पणकाणां संख्या = 20

16. 19

प्रश्नावली 2.3

1. x=18 **2.** t=-1 **3.** x=-2 **4.** z = $\frac{3}{2}$ **5.** x=5 **6.** x=0

7. x=40 **8.** x=10 **9.** y = $\frac{7}{3}$ **10.** m = $\frac{4}{5}$

प्रश्नावली 2.4

1. 4 **2.** 7, 35 **3.** 36 **4.** 26 (अथवा 62)

5. शोबो वर्यस्य आयुः = 5 वर्षम् , शोबो वर्यस्य मातुः आयुः = 30 वर्षम् ।

6. लम्बकम् = 275 m, वैशाल्यम् = 100 m **7.** 200 m **8.** 72

9. पौत्र्याः आयुः = 6 वर्षम् , पितामहस्य आयुः = 60 वर्षम्

10. अमनस्य आयुः = 60 वर्षम् , अमनस्य पुत्रस्य आयुः = 20 वर्षम्

प्रश्नावली 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ **2.** $n = 36$ **3.** $x = -5$ **4.** $x = 8$ **5.** $t = 2$ 6. $m = \frac{7}{5}$

7. $t = -2$ **8.** $y = \frac{2}{3}$ **9.** $z = 2$ **10.** $f = 0.6$

प्रश्नावली 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ **2.** $x = \frac{35}{33}$ **3.** $z = 12$ **4.** $y = -8$ **5.** $y = -\frac{4}{5}$

6. हरेः आयुः = 20 वर्षम्, हैरीवर्यस्य आयुः = 28 वर्षम् **7.** $\frac{13}{21}$

प्रश्नावली 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2, 4 (d) 2 (e) 1, 4

2. (a) 2 (b) 9 (c) 0 **3.** 360°; आम्

4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) (n - 2)180°

5. समभुजः तथा समकोणयुक्तः एकः बहुभुजः -

(i) समबाहुः त्रिभुजः (ii) वर्गः (iii) समषड्भुजः

6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°

7. (a) x+y+z=360° (b) x+y+z+w=360°

प्रश्नावली 3.2

1. (a) 360°- 250°= 110° (b) 360°- 310°= 50°

2. (i) $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ (ii) $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

3. $\frac{360}{24}$ =15 (भुजाः) **4.** भुजानां संख्या = 24

5. (i) न (यतो हि 360 इति संख्यां 22 इति न विभाजयति।)

(ii) न (यतो हि प्रत्येकं बहिष्कोणः 180°- 22°= 158° अस्ति, यः 360° इति संख्यां विभाजयति।)

6. (a) यतो हि समबाहु - त्रिभुजः त्रयाणां भुजानाम् एकः समबहुभुजः अस्ति, अत एव अस्य प्रत्येकम् अन्तः कोणस्य न्यूनतमं मापनं = 60° अस्ति।

(b) (a) इत्यस्मात् वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् सर्वतः बृहत् बहिष्कोणः 120° भविष्यति।

प्रश्नावली 3.3

(i) BC (सम्मुख-भुजाः समानाः एव भवन्ति।) (ii)∠ DAB (सम्मुख-कोणाः समानाः भवन्ति।)

(iii) OA (विकर्णः परस्परं समद्विभजति ।)

(iv) 180°(तिर्यक-रेखायाः एकपक्षस्य अन्तः कोणः, यतो हि AB||DC)

2. (i) x=80°;y= 100°;z= 80° (ii) x=130°;y= 130°;z= 130°

(iii) x=90°;y= 60°;z= 60° (iv) x=100°;y= 80°;z= 80°

(v) y=112°;x= 28°;z= 28°

3. (i) भवितुम् अर्हति परन्तु आवश्यकं नास्ति ।

(ii) न (एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे, सम्मुख-भुजाः समानाः भवन्ति परन्तु अत्र AD ≠ BC अस्ति ।)

(iii) न (एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे, सम्मुख-कोणाः समानाः भवन्ति परन्तु अत्र ∠A ≠ ∠C अस्ति ।)

4. उदाहरणार्थम् एकः पतङ्गः । **5.** 108°; 72°; **6.** प्रत्येकं कोणः एकः समकोणः अस्ति ।

7. x=110°;y= 40°; z= 30°

8. (i) x=6; y=9 (ii) x=3; y=13 **9.** x=50°

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (तिर्यक् रेखायाः एकपक्षस्य अन्तः कोणस्य योगः 180° अस्ति ।) अत एव KLMN एकः समलम्बः अस्ति ।

11. 60° **12.** ∠P = 50°; ∠S= 90°

प्रश्नावली 3.4

1. (b), (c), (f), (g) तथा (h) सत्यम् अस्ति , अन्यत् असत्यम् अस्ति ।

2. (a) समचतुर्भुजः ; वर्गः (b) वर्गः ; आयतः

3. (i) एकस्मिन् वर्गे चत्वारः भुजाः भवन्ति अत एव एषः एकः चतुर्भुजः अस्ति ।

(ii) एकस्य वर्गस्य सम्मुख-भुजाः समान्तराः भवन्ति ; अत एव एषः एकः समान्तरचतुर्भुजः अस्ति ।

(iii) वर्गः एकः एतादृशः समान्तर-चतुर्भुजः भवति यस्य सर्वे भुजाः समानाः भवन्ति अत एव एषः एकः समचतुर्भुजः अस्ति ।

(iv) वर्गः एकः एतादृशः समान्तर-चतुर्भुजः भवति यस्य सर्वे कोणाः समकोणाः भवन्ति अत एव एषः एकः आयतः भवति ।

4. (i) समान्तर-चतुर्भुजः ; समचतुर्भुजः ; वर्गः ; आयतः

(ii) समचतुर्भुजः ; वर्गः (iii) वर्गः; आयतः

5. अस्य उभौ विकर्णौ अस्य अभ्यन्तरे स्थितौ भवतः ।

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ अस्ति । अत एव, ABCD इति समान्तर-चतुर्भुजे $\overline{AC}$ इति विकर्णस्य मध्य-बिन्दुः O अस्ति ।

प्रश्नावली 5.1

1. (b), (d) एतासु सर्वासु स्थितिषु गणनाः अन्तरालेषु विभजितुं शक्यते ।

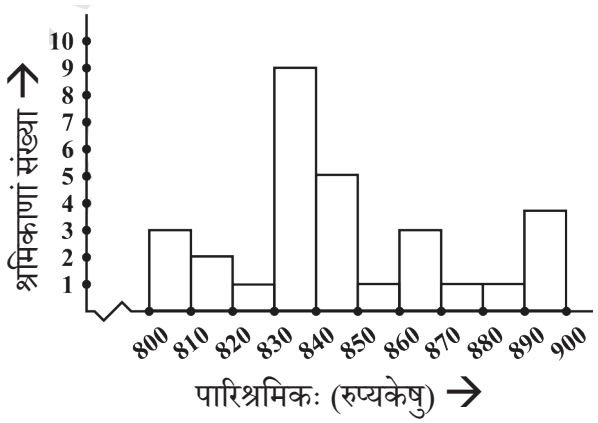
2.

क्रेता	मेलक-चिह्नम्	संख्या
W	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | | |	28
M	𝍸 𝍸 𝍸	15
B	𝍸	5
G	𝍸 𝍸 | |	12

3.

अन्तरालः	मेलक-चिह्नम्	निरन्तरता
800 - 810	|||	3
810 - 820	||	2
820 - 830	|	1
830 - 840	𝍸 ||||	9
840 - 850	𝍸	5
850 - 860	|	1
860 - 870	|||	3
870 - 880	|	1
880 - 890	|	1
890 - 900	||||	4
	योगः	**30**

4. (i) 830 - 840 (ii) 10
(iii) 20

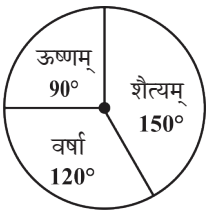


5. (i) 4 - 5 होरा (ii) 34
(iii) 14

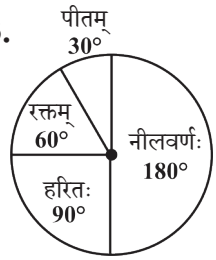
प्रश्नावली 5.2

1. (i) 200 (ii) मनोरञ्जकः (iii) शास्त्रीयः - 100 , उपशास्त्रीयः - 200 , मनोरञ्जकः - 400 , लोकः - 300

2. (i) शैत्यम् (ii) शैत्यम् - 150°, वर्षा - 120°, ऊष्णम् - 90° (iii)

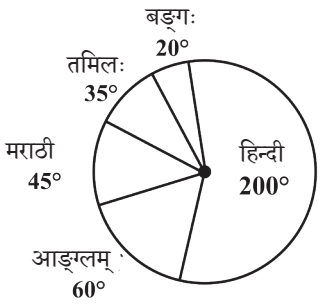


3.



5. (i) हिन्दी (ii) 30 अङ्काः (iii) आम्

5.



प्रश्नावली 5.3

1. (a) परिणामः A, B, C, D

(b) HT, HH, TH, TT [अत्र HT इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् प्रथमे नाणके शिरस्कं (head) तथा द्वितीय नाणके पृष्ठभागः (tail) इत्यादिः ।]

2. निम्नलिखितं प्राप्तुं घटनायाः परिणामः -

(i) (a) 2, 3, 5 (b) 1,4,6

(ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

5. हरित-त्रिज्यखण्डं प्राप्तुं प्रायिकता = $\frac{3}{5}$; एकम् ईदृशं त्रिज्यखण्डं प्राप्तुं प्रायिकता या नीलवर्णिका नास्ति $\frac{4}{5}$ ।

6. एकाम् अभाज्य-संख्यां प्राप्तुं प्रायिकता = $\frac{1}{2}$; एकाम् ईदृशीं संख्यां प्राप्तुं प्रायिकता या अभाज्या = $\frac{1}{2}$; नास्ति । 5 तः बृहतीं संख्यां प्राप्तुं प्रायिकता = $\frac{1}{6}$, 5 इत्यतः बृहतीं संख्यां न प्राप्तुं प्रायिकता = $\frac{5}{6}$

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9

(vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

2. एताः संख्याः निम्नलिखिते समाप्ताः भवन्ति -

(i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2 (vii) 0 (viii) 0

3. (i), (iii) **4.** 10000200001, 100000020000001

5. 1020304030201, 101010101^2 **6.** 20, 6, 42, 43

7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144

8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

प्रश्नावली 6.2

1. (i)1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116

2. (i) 6,8,18 (ii) 14,48,50 (iii) 16,63,65 (iv) 18,80,82

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 1.9 (ii) 4.6 (iii) 1.9 (iv) 5

2. (i), (ii), (iii)

3. 10, 13

4. (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98 (vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90

5. (i) 7;42 (ii) 5; 30 (iii) 7,84 (iv) 3; 78 (v) 2; 54 (vi) 3;48

6. (i) 7;6 (ii) 13;15 (iii) 11;6 (iv) 5; 23 (v) 7; 20 (vi) 5; 18

7. 49 **8.** 45 पङ्कतयः प्रत्येकं पङ्किषु 45 वृक्षाः **9.** 900 **10.** 3600

प्रश्नावली 6.4

1. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57 (vi) 37
(vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32 (xi) 56 (xii) 30

2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3

3. (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6

4. (i) 2;20 (ii) 53;44 (iii) 1; 57 (iv) 41.;28 (v) 31;63

5. (i) 4;23 (ii) 14.42 (iii) 4; 16 (iv) 24; 43 (v) 149;81

6. 21 m **7.** (a) 10 cm (b) 12 cm

8. 24 वृक्षाः **9.** 16 बालाः

प्रश्नावली 7.1

1. (ii) अपरञ्च (iv)

2. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 (v) 10

3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 3 (v)11

4. 20 घनाभः

प्रश्नावली 7.2

1. (i) 4 (ii) 8 (iii) 22 (iv) 30 (v) 25 (vi) 24 (vii) 48 (viii) 36 (ix) 56

2. (i) असत्यम् (ii) सत्यम् (iii) असत्यम् (iv) असत्यम् (v)असत्यम् (vi) असत्यम् (vii) सत्यम्

3. 11, 17, 23, 32

प्रश्नावली 8.1

1. (a) 1: 2 (b) 1: 2000 (c) 1: 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$ %

3. 28% विद्यार्थिनः

4. 25 क्रिकेटस्पर्धाः

5. 2400 रुप्यकाणि

6. 10% क्रिकेट - 30 लक्षम् ; कन्दुकम् -15 लक्षम् ; अन्यक्रीडाः - 5 लक्षम्

प्रश्नावली 8.2

1. 1,40,000 रुप्यकाणि **2.** 80% **3.** 34.80 रुप्यकाणि **4.** 18342.50 रुप्यकाणि **5.** 2% लाभः **6.** 2835 रुप्यकाणि **7.** 1269.84 रुप्यकाणि हानिः **8.** 14560 रुप्यकाणि **9.** 2000 रुप्यकाणि **10.** 5000 रुप्यकाणि

प्रश्नावली 8.3

1. (a) मिश्रधनम् = रु.15377.34; चक्रवृद्धिकुसीदः = रु.4577.34

(b) मिश्रधनम् = रु.22869; कुसीदः = रु.4869

(c) मिश्रधनम् = रु.70,304, कुसीदः = रु.7804

(d) मिश्रधनम् = रु.87360.20, कुसीदः = रु. 736.20

(e) मिश्रधनम् = रु.10,816, कुसीदः = रु. 816

2. रु. 36659.70 **3.** फैबिना 362.50 रुप्यकाणि अधिकं ददाति। **4.** रु. 43.20

5. (i) रु. 63,600 (ii) रु. 67416 **6.** (i) रु. 92400 (ii) रु. 92610

7. (i) रु. 8820 (ii) रु. 441

8. मिश्रधनम् = रु.11576.25, कुसीदः = रु. 1576.25; आम्

9. रु. 4913 **10.** (i) प्रायः 48980 (ii) 50535 11. 531616 (प्रायः)

12. रु. 38640

प्रश्नावली 9.1

	पदम्	गुणाङ्कः
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 -3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 -4 1
(iv)	3 -pq qr -rp	3 -1 1 -1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ -xy	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1
(vi)	0.3a -0.6ab 0.5b	0.3 -0.6 0.5

2. एकपदी : 1000 pqr

द्विपदी : $x+y$,$2y-3y^2$,$4z-15z^2$, p^2q+pq^2,$2p+2q$

त्रिपदी : $7+y+5x$,$2y-3y^2+4y^3$,$5x-4y+3xy$

ते बहुपदाः ये उपरोक्त-श्रेण्यां नागच्छन्ति : $x+x^2+x^3+x^4$,$ab+bc+cd+da$

3. (i) 0 (ii) $ab+bc+ac$ (iii) $-p^2q^2+4pq+9$

(iv) $2(l^2+m^2+n^2+lm+mn+nl$

4. (a) $8a-2ab+2b-15$ (b) $2xy-7yz+5zx+10xyz$

(c) $p^2q-7pq^2+8pq-18q+5p+28$

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^2$ (v) 0
2. pq;$50mn$; $100x^2y^2$;$12x^2$;$12mn^2p$
3.

प्रथम-एकपद → / द्वितीय-एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y$	$49x^4y^2$	$63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^2$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

प्रश्नावली 9.3

1. (i) $4pq+4pr$ (ii) a^2b-ab^2 (iii) $7a^3b^2+7a^2b^3$ (iv) $4a^3-36a$ (v) 0

2. (i) $ab+ac+ad$ (ii) $5x^2y+5x^2y-25xy$ (iii) $6p^3-7p^2+5p$

(iv) $4p^4q^2-4p^2q^4$ (v) $a^2bc+ab^2c+abc^2$

3. (i) $50a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2-15x+3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$

(b) a^3+a^2+a+5; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2+q^2+r^2-pq-qr-pr$ (b) $-2x^2-2y^2-4xy+2yz+2zx$

(c) $5l^2+25ln$ (d) $-3a^2-2b^2+4c^2-ab+6bc-7ac$

प्रश्नावली 9.4

1. (i) $8x^2+14x-15$ (ii) $3y^2-28y+32$ (iii) $6.25l^2-0.25m^2$
(iv) $ax+5a+3bx+15b$ (v) $6p^2q^2+5pq^3-6q^4$ (vi) $3a^4+10a^2b^2-8b^4$

2. (i) $15-x-2x^2$ (ii) $7x^2-48xy-7y^2$ (iii) $a^3+a^2b^2+ab+b^2$
(iv) $2p^3+p^2q-2pq^2-q^3$

3. (i) x^3+5x^2-5x (ii) $a^2b^3+3a^2+5b^3+20$ (iii) $t^3-st+s^2t^2-s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2+4xy-y^2$ (vi) x^3+y^3
(vii) $2.25x^2-16y^2$ (viii) $a^2+b^2-c^2+2ab$

प्रश्नावली 9.5

1. (i) x^2+6x+9 (ii) $4y^2+20y+25$ (iii) $4a^2-28a+49$
(iv) $9a^2-3a+\frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2-0.16$ (vi) b^4-a^4
(vii) $36x^2-49$ (viii) $a^2-2ac+c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4}+\frac{3xy}{4}+\frac{9y^2}{16}$
(x) $49a^2-126ab+81b^2$

2. (i) $x^2+10x+21$ (ii) $16x^2+24x+5$ (iii) $16x^2-24x+5$
(iv) $16x^2+16x-5$ (v) $4x^2+16xy+15y^2$ (vi) $4a^4+28a^2+45$
(vii) $x^2y^2z^2-6xyz+8$

3. (i) $b^2-14b+49$ (ii) $x^2y^2+6xyz+9z^2$ (iii) $36x^4-60x^2y+25y^2$
(iv) $\frac{4}{9}m^2+2mn+\frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2+0.04pq+0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2+20xy^2+25y^2$

4. (i) $a^4-2a^2b^2+b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2+128n^2$
(iv) $41m^2+80mn+41n^2$ (v) $4p^2-4q^2$ (vi) $a^2b^2+b^2c^2$
(vii) $m^4+n^4m^2$

6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004 (v) 27.04 (vi) 89991
(vii) 6396 (viii) 79.21 (ix) 9.975

7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84

8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

प्रश्नावली 10.1

1. (a) → (iii) → (iv) (b) → (i) → (v) (c) → (iv) → (ii)
(d) → (v) → (iii) (e) → (ii) → (i)

2. (a) (i) → पुरतः, (ii) → पार्श्वम्, (iii) → उपरि (b) (i) →पार्श्वम्, (ii) → पुरतः, (iii) → उपरि
(c) (i) → पुरतः, (ii) → पार्श्वम्, (iii) → उपरि (d) (i) → पुरतः, (ii) → पार्श्वम्, (iii) → उपरि

3. (a) (i) → उपरि, (ii) → पुरतः, (iii) → पार्श्वम् (b) (i) →पार्श्वम्, (ii) → पुरतः, (iii) → उपरि
(c) (i) →उपरि, (ii) → पार्श्वम्, (iii) → पुरतः (d) (i) → पार्श्वम्, (ii) → पुरतः, (iii) → उपरि
(e) (i) →पुरतः, (ii) → उपरि, (iii) → पार्श्वम्

प्रश्नावली 10.3

1. (i) न (ii) आम् (iii) आम् **2.** तदा एव सम्भवम् अस्ति यदा फलकानां संख्या 4 अथवा ततः अधिका भवेत् ।

3. केवलम् (ii) तथा (iv)

4. (i) एकं प्रिज्मयन्त्रं बेलनस्य रूपं स्वीकरोति यदा आधारस्य भुजानां संख्या बृहतीतः बृहती भवति ।

(ii) एकः त्रिशङ्कुः शङ्कोः रूपं गृह्णाति यदा आधारस्य भुजानां संख्या बृहतीतः बृहती भवति ।

5. न एषः घनाभः भवितुं नार्हति । **6.** फलकम् - 8 , शीर्षम् - 6 , तटम् - 30

7. न ।

प्रश्नावली 11.1

1. (a) **2.** रु. 17,875 **3.** क्षेत्रफलम् = $129.5m^2$; परिमापनम् = 48 m

4. 45000 प्रस्तरखण्डाः **5.** (b)

प्रश्नावली 11.2

1. 0.88 m^2 **2.** 7 cm **3.** 660 m^2 **4.** 252 m^2 **5.** 45 cm^2 **6.** 24 m^2,6 cm

7. रु. 814 **8.** 140 m **9.** 119 m^2 **10.** ज्योतेः विधिना क्षेत्रफलम् = $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30 + 15)\ m^2$

= $337.5m^2$ कविताया: विधिना क्षेत्रफलम् $(\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15)\ m^2 = 337.5m^2$

11. $80cm^2$, 96. cm^2, $80cm^2$, $96cm^2$

प्रश्नावली 11.3

1. (a) **2.** 144 m **3.** 10cm **4.** 10 m^2 5. 5 कैनपरिमितम्

6. समानता - उभयोः समानम् औन्नत्यं वर्त्तते , अन्तरः - एकः बेलनाकारः अस्ति द्वितीयः घनः अस्ति । घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफम् अधिकम् अस्ति ।

7. $440m^2$, 8. 322cm 9. $1980m^2$, 10. 704 cm^2

प्रश्नावली 11.4

1. (a) आयतनम् (b) पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् (c) आयतनम्

2. B इति बेलनाकारस्य आयतनम् अधिकम् अस्ति । B इति बेलनाकारस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ।

3. 5 cm **4.** 450 **5.** 1 m **6.** 49500 L

7. (i) चतुर्गुणम् (ii) अष्टगुणम् **8.** 30 घण्टाः

प्रश्नावली 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{3^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ **5.** m=2 **6.** (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$ **7.** $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

प्रश्नावली 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}

(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003

(iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}

(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

प्रश्नावली 13.1

1. न

2.

रक्तवर्णस्य भागः	1	4	7	12	20
मूलमिश्रणस्य भागः	8	32	56	96	160

3. 24 भागः **4.** 700 कूपी **5.** 10^{-4} cm;2 cm **6.** 21 cm

7. (i) 2.25×10^7 काञ्चवस्तु (ii) 5.4×10^6 काञ्चवस्तु **8.** 4cm

9. (i) 6 m (ii) 8 m 75 cm **10.** 168 km

प्रश्नावली 13.2

1. (i), (iv), (v) 2. 4 → 25,000; 5 → 20,000; 8 → 12,500; 10 → 10,000; 20 → 5,000

3. 8 → 45°, 10 → 36°, 12 → 30°, (i) आम् (ii) 24° (iii) 9

4. 6 **5.** 4 **6.** 3 दिनम् **7.** 15 मञ्जूषा

8. 49 यन्त्रम् **9.** $1\frac{1}{2}$ घण्टाः **10.** (i) 6 दिनम् (ii) 6 व्यक्तिः **11.** 40 मिनटाः

प्रश्नावली 14.1

1. (i) 12 (ii) 2y (iii) 14pq (iv) 1 (v) 6ab (vi) 4x (vii) 10 (viii) $x^2 y^2$

2. (i) $7(x - 6)$ (ii) $6(p - 2q)$ (iii) $7a(a + 2)$ (iv) $4z(-4 + 5z^2)$
(v) $10lm(2l + 3a)$ (vi) $5xy(x - 3y)$ (vii) $5(2a^2 + 3b^2 + 4c^2)$ (viii) $4a(-a+b-c)$
(ix) $xyz(x + y + z)$ (x) $xy(ax + by + cz)$

3. (i) $(x + 8)(x + y)$ (ii) $(3x + 1)(5y - 2)$ (iii) $(a + b)(x - y)$ (iv) $(5p + 3)(3q+5)$
(v) $(z - 7)(1 - xy)$

प्रश्नावली 14.2

1. (i) $(a + 4)^2$ (ii) $(p - 5)^2$ (iii) $(5m + 3)^2$ (iv) $(7y + 6z)^2$
(v) $4(x - 1)^2$ (vi) $(11b - 4c)^2$ (vii) $(1 - m)^2$ (viii) $(a^2 + b^2)^2$

2. (i) $(2p - 3q)(2p + 3q)$ (ii) $7(3a - 4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x - 6)(7x + 6)$
(iv) $16^3(x - 3)(x + 3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy - 4)(3xy + 4)$
(vii) $(x - y - z)(x - y + z)$ (viii) $(5a - 2b + 7c)(5a + 2b - 7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2 + 3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2 + n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+b)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

प्रश्नावली 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$ (iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) $q^3 - p^3$

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$

(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$

(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

प्रश्नावली 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2x$ **3.** $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$ **5.** $5y+2y+y-7y=y$ **6.** $3x+2x=5x$

7. $(2x)^2+4(2x)+7=4x^2+8x+7$ **8.** $(2x)^2+5x=4x^2+5x$

9. $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$ **10.** (a) $(-3)^2+5(-3)+4=9-15+4=-2$

(b) $(-3)^2-5(-3)+4=9+15+4=28$ (c) $(-3)^2+5(-3)=9-15=-6$

11. $(y-3)^2=y^2-6y+9$ **12.** $(z+5)^2=z^2+10z+25$

13. $(2a+3b)(a-b)=2a^2+ab-3b^2$ **14.** $(a+4)(a+2)=a^2+6a+8$

15. $(a-4)(a-2)=a^2-6a+8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2}=1$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2}=\frac{3x^2}{3x^2}+\frac{1}{3x^2}=1+\frac{1}{3x^2}$ **18.** $\frac{3x}{3x+2}=\frac{3x}{3x+2}$

19. $\frac{3}{4x+3}=\frac{3}{4x+3}$ **20.** $\frac{4x+5}{4x}=\frac{4x}{4x}+\frac{5}{4x}=1+\frac{5}{4x}$

21. $\frac{7x+5}{5}=\frac{7x}{5}+\frac{5}{5}=\frac{7x}{5}+1$

प्रश्नावली 15.1

1. (a) 36.5°C (b) मध्याह्ने 12 वादने। (c) मध्याह्ने 1 वादने, मध्याह्ने 2 वादने।

(d) 36.5°C मध्याह्ने 1 वादनतः 2 वादनस्य मध्ये x- अक्षे स्थितः बिन्दुः मध्याह्नं 1 वादनं तथा 2 वादनं दर्शयतः बिन्दुतः समदूरस्थः अस्ति, अत एव एतत् मध्याह्नस्य सार्धैकवादनस्य समयं प्रदर्शयिष्यति। एवमेव y-अक्षे 36°C तथा 37°C इत्यस्य मध्यस्थं 36.5°C इति बिन्दुं प्रदर्शयिष्यति।

(e) प्रातः 9 वादनतः 10 वादनपर्यन्तं, प्रातः 10 वादनतः 11 वादनपर्यन्तं, मध्याह्ने 2 वादनतः मध्याह्ने 3 वादनपर्यन्तम्।

2. (a) (i) 4 कोटिरुप्यकाणि (ii) 8 कोटिरुप्यकाणि

(b) (i) 7 कोटिरुप्यकाणि (ii) 8.5 कोटिरुप्यकाणि (प्रायः)

(c) (i) 4 कोटिरुप्यकाणि (d) 2005

3. (a) (i) 7 cm (ii) 9 cm

(b) (i) 7 cm (ii) 10 cm

(c) (i) 2 cm (d) 3 cm

(e) द्वितीय-सप्ताहः (f) प्रथम-सप्ताहः

(g) द्वितीयसप्ताहस्य अन्ते।

4. (a) मङ्गलः, शुक्रः, रविः (b) 35°C (c) 15°C (d) बृहस्पतिवासरः

6. (a) 4 एककः = 1 घण्टा (b) $3\frac{1}{2}$ घण्टाः (c) 22 km

(d) आम्, एतत् आलेखस्य क्षैतिजभागात् दर्शितं भवति।

(प्रातः 10 वादनतः प्रातः 10:30 वादनपर्यन्तम्)

(e) प्रातः 8 वादने तथा 9 वादनस्य मध्ये

7. (iii) सम्भवं नास्ति।

प्रश्नावली 15.2

1. (a) तथा (b) इत्यस्मिन् एकः बिन्दुः एकस्यां रेखायां स्थितः अस्ति। (c) इत्यस्मिन् एकः बिन्दुः एकस्यां रेखायां स्थितः नास्ति।

2. एषा रेखा x- अक्षं (5, 0) तथा y- अक्षं (0, 5) इत्यस्मिन् कर्त्तयिष्यति।

3. O(0, 0), A (2, 0), B (2, 3), C (0, 3), P (4, 3), Q (6, 1), R (6, 5), S (4, 7), K (10, 5), L (7, 7), M (10, 8),

4. (i) सत्यम् (ii) असत्यम् (iii) सत्यम्

प्रश्नावली 15.3

1. (b) (i) 20 km (ii) प्रातः 7.30 वादनम् (c) (i) आम् (ii) 200 रुप्यकाणि (iii) 3500 रुप्यकाणि

2. (a) आम् (b) न

प्रश्नावली 16.1

1. A = 7, B = 6 **2.** A = 5, B = 4, C = 1 **3.** A = 6

4. A = 2, B = 5 **5.** A = 5, B = 0, C = 1 **6.** A = 5, B = 0, C = 2

7. A = 7, B = 4 **8.** A = 7, B = 9 **9.** A = 4, B = 7

10. A = 8, B = 1

प्रश्नावली 16.2

1. y=1 **2.** z=0 अथवा 9 **3.** z=0,3,6 अथवा 9

4. 0,3,6 अथवा 9

केवलं क्रीडनाय

1. पाइथागोरियन-त्रिकविषये इतोऽपि किञ्चित्

वयं पाइथागोरियन-त्रिकाणाम् एकप्रकारेण 2m, m^2-1, m^2+1 लेखनम् एवं भवेत् इति दृष्टवन्तः। एकस्य पाइथागोरियन-त्रिकस्य a,b,c इत्यस्य अर्थः $a^2+ b^2+ c^2$ अस्ति। यदि वयं प्राकृत-संख्या-द्वयस्य m तथा n इत्यस्य प्रयोगं कुर्याम (m >n) तथा a= m^2-n^2, b=2mn एवं c= m^2+ n^2 गृह्णामः तदा वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् $c^2= a^2+ b^2$ अस्ति। एवं प्रकारेण m >n इत्यनेन सह वयं m तथा n इत्यस्य विभिन्न-मानस्य कृते प्राकृत-संख्याम् a,b,c एवं निर्मातुं शक्नुमः यत् ताः पाइथागोरियन-त्रिकरूपेण भवेयुः।

उदाहरणार्थं m=2, n=1 गृह्णन्तु।

तदा a=m^2- n^2=3,b=2mn=4, c= m^2+ n^2=5 इति एकः पाइथागोरियन-त्रिकः अस्ति। (अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु !) m=3, n=2 इत्यस्मै वयं प्राप्नुमः। a=5, b=12, c=13 यः पुनः एकः पाइथागोरिन-त्रिकः एव अस्ति। तथा इत्यस्य काञ्चन् इतोऽपि मानान् स्वीकुर्वन्तु तथा एवमेव इतोऽपि अधिकं त्रिकं जनयन्तु।

2. यदा जलं कुत्रापि एकत्रितं भवति तदा तस्य आयतने 4 % इत्यस्य वृद्धिः भवति। 221 cm^3 हिमम् उत्पादयितुं कियत् जलस्य आवश्यकता भविष्यति ?

3. यदि चायस्य मूल्यं 20 % वर्धितं स्यात् तर्हि तस्य व्यये कियत् प्रतिशतं न्यूनता भवेत् येन तस्मिन् भविष्यमाणे व्यये काऽपि वृद्धिः न भवेत् ?

4. समारोही पुरस्कारः 1985 तमे वर्षे प्रारब्धः । तदा पुरस्कारं जेतुं 29 श्रेण्यः आसन् । 1993 तमे वर्षे 81 श्रेण्यः आसन् ।

(i) 1958 तमे वर्षे दत्त-पुरस्काराणां संख्या 1993 तमवर्षस्य पुरस्काराणां संख्यायाः कियत् प्रतिशतम् अस्ति ?

(ii) 1993 तमे वर्षे दत्त-पुरस्काराणां संख्या 1958 तमवर्षस्य पुरस्काराणां संख्यायाः कियत् प्रतिशतम् अस्ति ?

5. भ्रमराणां समूहात् $\frac{1}{5}$ भागः कदम्बस्य पुष्पे गत्वा उपविष्टवान् $\frac{1}{3}$ सिलिंघिरि इति नाम पुष्पस्य तथा एतयोः उभयोः संख्ययोः त्रिगुणितः समूहः कुटजपुष्पे गत्वा उपविष्टवन्तः । तदा समूहे केवलं दशभ्रमराः एव अवशिष्टाः अभवन् । समूहे प्रारम्भे कति भ्रमराः आसन् ? [ध्यानं ददतु यत् कदम्ब-सिलिंघिरि-कुटजपुष्पाणां वृक्षाः सन्ति । एषा समस्या बीजगणितस्य एकस्मात् भारतीय ग्रन्थात् गृहीता अस्ति ।]

6. कस्यापि वर्गस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं, शेखरः वर्गक्षेत्रफलस्य सूत्रस्य प्रयोगं कृतवान्, यद्यपि तस्य मित्रं मरूफः वर्गपरिमापस्य सूत्रं प्रयुक्तवान् । आश्चर्यस्य वार्त्ता इयं यत् उभयस्य उत्तरं संख्यात्मकरूपे एकसमानम् एव आसीत् । मां ज्ञापयन्तु यत् यस्मिन् वर्गे ते कार्यं कुर्वन्ति स्म तस्य भुजस्य एककानां संख्या का ?

7. एकस्य वर्गस्य क्षेत्रफलं संख्यात्मकरूपेण स्वस्य भुजस्य 6 गुणितं न्यूनम् अस्ति । एतादृशानां केषाञ्चन वर्गाणां सूचीं निर्मापयन्तु यस्मिन् एवं भवति ।

8. किम् एतत् सम्भवम् अस्ति यत् एकस्य लम्बवृत्तीय-बेलनाकारस्य आयतनं संख्यात्मकरूपेण तस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलस्य समानं भविष्यति ? यदि आम् तर्हि ज्ञापयन्तु कदा ।

9. लीला स्वजन्म-दिवसे कानिचन मित्राणि चायपानार्थम् आहूतवती । तस्याः माता परिवण्टनाय एकस्याम् उत्पीठिकायां कांश्चन स्थालिकाः तथा कांश्चन शष्कुलीः स्थापितवती । यदि लीला प्रत्येकं स्थालिकायां 4 शष्कुलीः स्थापयति तर्हि एका स्थालिका रिक्ता एव भवति । यदि सा प्रत्येकं स्थालिकायां 3 शष्कुलीं स्थापयति तर्हि 1 शष्कुली अवशिष्टा भवति । उत्पीठिकायां स्थितानां शष्कुलीनां स्थालिकानाञ्च संख्यां जानन्तु ।

10. किम् एतादृशी काऽपि संख्या अस्ति या स्वस्य घनस्य समाना भवेत् , परन्तु स्वस्य वर्गस्य समाना न भवेत् ? यदि आम् तर्हि तां संख्यां ज्ञापयन्तु ।

11. एकस्यां पङ्क्तौ 1 तः 20 विंशति पर्यन्तं संख्यां एवं व्यवस्थितं कुर्वन्तु यत् कस्यापि आसन्नद्वयस्य संख्यानां योगः एकः पूर्णः वर्गः भवेत् ।

उत्तरमाला

2. $212\ \frac{1}{2}\ cm^3$ **3.** $16\ \frac{2}{3}\ \%$ **4.** (i) 34.5% (ii) 289%

5. 150

6. 4 एककाः

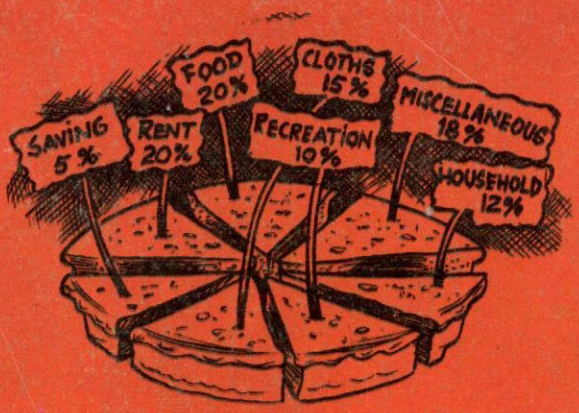
7. भुजः = 1, 2, 3, 4, 5 एककाः

8. आम् यदा त्रिज्या = 2 एककः

9. शष्कुलीनां संख्या = 16, स्थालिकानां संख्या = 5

10. -1

11. एकः विधिः अयम् अस्ति 1, 3, 6, 19, 17, 8 (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 इत्यादिः) कतिभिः विधिभिः इतोऽपि प्रयासः करणीयः ।



0853

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

ISBN 978-81-7450-815-7